

# 目 录

## II. 相互作用

第十七章	概论	1
第十八章	$SU_3$ 对称性	9
§ 18.1	$SU_3$ 对称性	9
§ 18.2	物理应用	16
第十九章	量子色动力学	23
第二十章	色介常数和夸克囚禁	30
§ 20.1	色介常数和真空的抗色性	30
§ 20.2	夸克囚禁	32
§ 20.3	证明当 $L > l$ 时, $\kappa_L < \kappa_l$	38
第二十一章	孤粒子(或袋)模型	43
§ 21.1	以量子色动力学为基础的唯象拉氏密度	43
§ 21.2	零阶近似	45
§ 21.3	辐射修正	54
第二十二章	弱相互作用唯象分析	62
§ 22.1	纯轻子弱相互作用	62
§ 22.2	半轻子弱相互作用	64
§ 22.3	无轻子弱相互作用	74
§ 22.4	么正极限	74
第二十三章	无标度假设	78
§ 23.1	无标度假设	78
§ 23.2	无标度假设的应用	80
§ 23.3	无标度性的破坏	87
第二十四章	戈德斯通机制和希格斯机制	89

§ 24.1	戈德斯通机制 .....	89
§ 24.2	希格斯机制 .....	94
<b>第二十五章</b>	<b>温伯格理论</b> .....	99
§ 25.1	$SU_2 \times U_1$ 群 .....	99
§ 25.2	温伯格理论 .....	101
§ 25.3	格拉肖-伊利奥朴勒斯-迈阿尼机制 (简称 GIM 机制) .....	110
<b>第二十六章</b>	<b>夸克部分子模型</b> .....	113
§ 26.1	部分子假设 .....	113
§ 26.2	部分子模型的应用示例 .....	116
<b>习题</b>	.....	120

## II. 相互作用

### 第十七章 概 论

相互作用的研究是粒子物理学最基本的内容。近几年来,在这个领域里发生了很大变化,许多方面取得了重要进展。 $J/\psi$  家族和  $\Upsilon$  粒子的发现,表明夸克模型作为强子谱和强子动力学的基础是极为有用的;中性流的发现,轻子和强子的各种深度非弹性过程的研究,导致人们期望也许最终可以把弱相互作用和电磁相互作用统一起来;而重轻子的发现,再一次提醒人们,粒子物理学现有的图象还是极不完善的。所有这些使相互作用的研究在目前是极其激动人心的。

目前所谓的基本粒子可以分成三类:

- 一、媒介子,包括光子、引力子、中间玻色子;
- 二、轻子,包括各种中微子,  $e^\pm$ ,  $\mu^\pm$ ,  $\tau^\pm$ ,  $\dots$ ;
- 三、夸克,包括  $d$  (下),  $u$  (上),  $s$  (奇),  $c$  (粲),  $b$  (底),  $t$  (顶),  $\dots$ 。

这里我们引进了一个名称“媒介子”,媒介子是传递各种相互作用的粒子,但它不是普通的所谓介子。光子、引力子和中间玻色子分别传递电磁相互作用、引力作用和弱相互作用。引力子和中间玻色子尚未在实验中观察到,但是,目前大多数粒子物理学家相信它们是存在的。

轻子这个名称是从历史上沿袭下来的,它并不是很恰当的。开始发现的轻子确实很轻,但近年来发现的  $\tau$  轻子并不轻,其质量达到 1.8 GeV。

夸克是有强相互作用的基本粒子。“夸克”这个名称是盖尔曼 (M. Gell-Mann) 提出的,它的原意是一种瑞士奶酪蛋糕。最初盖尔

曼提出夸克模型时,他对这个理论也不是认真看待的,但是后来的发展表明这个理论是非常重要的。在现代的“粒子性质表”上,“基本”二字已经去掉。过去人们认为,普通强子都是基本粒子,但是现在认为,它们是由夸克组成的。这是本世纪六十年代初到七十年代中一个具有革命性的转变。这个转变和十九世纪旧的物质结构观念转变到原子、分子观念几乎有同样的重要性。至于前面列举的三种基本粒子,可能也只是暂时可以认为是基本的。

根据夸克模型,所有的强子都是夸克的或夸克和反夸克的复合态。所有介子( $\pi, K, \rho, \omega, \dots$ )都是由一个夸克和一个反夸克组成的;所有重子( $p, n, \Lambda, \Delta, \dots$ )都是由三个夸克组成的。图 17.1 是强子结构的示意图,其中  $q$  表示夸克,  $\bar{q}$  表示反夸克。

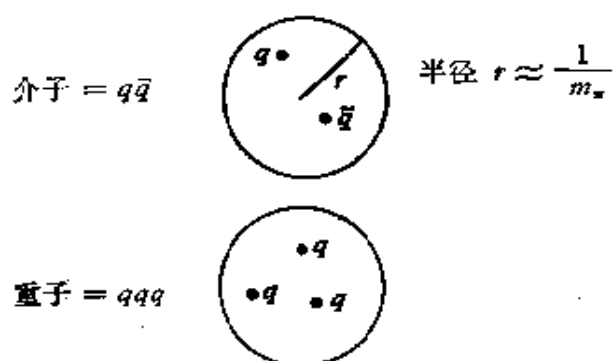


图 17.1

以后我们要说明,怎样从实验决定夸克的自旋、电荷和质量。实验表明,夸克的自旋为  $\frac{1}{2}$ 。强子内的夸克和自由轻子的质量有明显的对应关系:

夸克	$d$	$u$	$s$	$c$	$b$
轻子	$\nu$	$e$	$\mu$	$\tau$	
质量(大约)	0	0	$0(10^2 \text{ MeV})$	2 GeV	5 GeV

夸克的电荷如下:

夸克	$d$	$u$	$s$	$c$	$b$	$t(?)$
电荷(单位 $e$ )	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}(?)$

以下我们用具体例子说明强子是怎样由夸克组成的。

**例1** 夸克模型认为  $\pi^+$  或  $\rho^+ = \bar{d}u$ ;  $\pi^-$  或  $\rho^- = \bar{u}d$ ;  $\pi^0$  或  $\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$ 。

从电荷看来这是对的。例如,  $\bar{d}$  的电荷为  $\frac{1}{3}$ ,  $u$  的电荷为  $\frac{2}{3}$ , 所以  $\bar{d}u$  的电荷为 1, 和  $\pi^+$ ,  $\rho^+$  的电荷一样。

我们假定组成介子的  $\bar{q}q$  处于  $s$  波状态, 于是介子的自旋由  $\bar{q}q$  的总自旋决定。  $\bar{q}q$  的旋量波函数有两类,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\bar{q}}\downarrow_q - \downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q)$  代表自旋为零的状态。由于  $q$  和  $\bar{q}$  的内禀宇称相反,  $\bar{q}q$  的宇称是负的, 因此,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\bar{q}}\downarrow_q - \downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q)$  代表  $0^-$  赝标介子。  $\uparrow_{\bar{q}}\uparrow_q$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\bar{q}}\downarrow_q + \downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q)$ ,  $\downarrow_{\bar{q}}\downarrow_q$  是自旋为 1, 宇称为负的重态, 代表  $1^-$  矢量介子。

注意,  $J=1$ ,  $J_z=0$  的自旋波函数为  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\bar{q}}\downarrow_q + \downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q)$ , 但是,  $I=1$ ,  $I_z=0$  的同位旋波函数为  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$ 。  $\downarrow_{\bar{q}}\uparrow_q$  和  $\bar{d}d$  前的符号相反。根据第十一章的讨论, 我们知道, 如果  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  是一个同位旋旋量, 则  $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$  也是一个同位旋旋量,  $\bar{u}$  前的负号导致  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$  中的  $\bar{u}u$  和  $-\bar{d}d$  的相对相因子相反。这一点也可以由下述方法看出。令  $\phi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ , 则  $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\phi}\tau_3\phi$  是一个同位旋矢量。其第三分量为  $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\phi}\tau_3\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$ , 和前面的结果一致。

另外要注意, 由于夸克  $u, d$  的质量  $\cong 0$ , 它们在介子内的运动是相对论性的。在这种情形下, 为什么可以把自旋角动量和轨道角动量分开考虑呢? 在第二十一章中, 我们将考虑夸克运动的

相对论性。但在这里,我们只是指出,暂时忘掉相对论性所得到的某些结果和考虑了相对论性所得到的结果是一致的。

**例2** 由  $\bar{s}u, \bar{s}d$  可以组成  $K^+, K^0$  和  $K^{*+}, K^{*0}(892)$ , 由  $\bar{u}s, \bar{d}s$  可以组成  $K^-, \bar{K}^0$  和  $K^{*-}, \bar{K}^{*0}$ ; 由  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$  和  $\bar{s}s$  可以组成  $\eta, \eta'(958)$  和  $\phi, \omega$ 。

由  $d, u, s$  可以构成 9 种  $\bar{q}q$ , 又  $\bar{q}q$  的自旋状态有 4 种, 所以  $\bar{q}q$  有 36 种状态。  $\pi^{\pm,0}, K^{\pm,0,\bar{0}}, \eta, \eta'$  (共 9 种) 属于自旋为 0, 内禀宇称为负的状态。  $\rho^{\pm,0}, K^{*\pm,0,\bar{0}}, \omega, \phi$  (共 9 种, 每种有 3 个自旋状态) 属于自旋为 1, 内禀宇称为负的状态。从粒子性质表可以看到, 它们是最低能量状态。如果忽略夸克之间的自旋有关作用的影响, 这 36 个状态是简并的。自旋有关作用使  $0^-$  粒子和  $1^-$  粒子的质量分开来。

**例3**  $J/\psi(3100), \chi(3415, 3510, 3555)$  和  $\psi(3685)$  是由  $\bar{c}c$  组成的;  $Y(9500)$  大概是由  $\bar{b}b$  组成的。

**例4** 重子是  $qqq$  复合态。例如

	总自旋
$uud = \begin{cases} p \\ \Delta^+(1232) \end{cases}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$
$ddu = \begin{cases} n \\ \Delta^0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$
$uuu = \Delta^{++}$	$\frac{3}{2}$
$ddd = \Delta^-$	$\frac{3}{2}$

根据上面的讨论,可以得到几个令人惊奇的结果:

1. 夸克有分数电荷, 例如由  $\Delta^{++} = uuu$ , 可以推出  $Q_u = \frac{2}{3}$ . 然后根据其他粒子的电荷可以推出另外一些夸克的电荷也是分数的.

2. 夸克有三色, 无色是强子. 重子中的  $qqq$  处于  $s$  波中, 于是总自旋等于  $\frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{2}$ , 恰好可以用来描写低质量态的  $\frac{1}{2}^+$  重子和  $\frac{3}{2}^+$  重子. 反之, 如果  $qqq$  不处于  $s$  波中, 就有许多实验上无法说明的多余状态. 另一方面, 如果  $qqq$  在  $s$  波中, 就和费米统计的要求矛盾. 例如  $\Delta^{++} = uuu$ , 它的自旋波函数和同位旋波函数都是对称的, 因此总波函数也是对称的. 1964 年格林伯格 (O. W. Greenberg) 提出夸克服从反常统计 (parastatistics) 理论. 根据这个理论可以认为, 每种夸克都有三种颜色. 这样就可以在  $s$  波情形下组成反对称的波函数, 因而满足费米统计的要求. 但是引进颜色量子数后可能的状态就太多了. 于是格林伯格进一步假定普通强子是无色的, 而有颜色的态是不允许的. 例如介子波函数为  $\bar{q}_R q_R + \bar{q}_B q_B + \bar{q}_G q_G$ . 与颜色(简称色)相对照, 人们把夸克的上, 下, 奇, 粲, ... 称为味道(简称味).

我们进一步讨论一下怎样从实验直接定出夸克的自旋、电荷、质量和颜色的问题. 考虑  $e^+e^-$  对撞实验. 对撞后终态为  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ ,  $\bar{q}q$  等.  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ,  $\bar{q}q$  可用图 17.2 表示. 当  $s = (E_{\text{质心系}})^2 \gg (2m_q)^2$  ( $2m_q$  是图 17.2(b) 过程的阈能) 时, 如果忽略

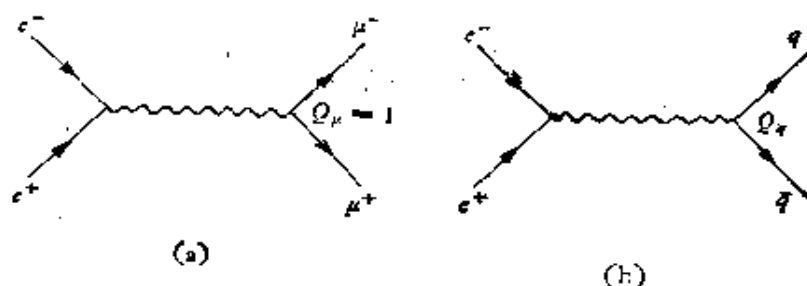


图 17.2

终态中  $q, \bar{q}$  之间的强相互作用, 就有 (参考本书上册习题 7)

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \cong 3Q_q^2, \quad (17.1)$$

其中  $q = u, d, s, \dots$ , 系数 3 是夸克的三种颜色贡献的, 如果对所有强子终态求和, 则得

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{所有强子终态})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \cong 3 \sum_q Q_q^2, \quad (17.2)$$

其中  $\sum_q$  表示对质量  $m_q < \frac{1}{2} \sqrt{s}$  的夸克求和, 假定夸克的电荷数值如第 2 页所示, 则当

$1 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} < 2m_c$  时 (假定  $2m_u, 2m_d$  及  $2m_s \ll 1 \text{ GeV}$ ),

$$R \cong 3 \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right] = 2;$$

当  $2m_c < \sqrt{s} < 2m_b$  时,

$$R \cong 2 + \Delta R = 3 \frac{1}{3}, \quad \Delta R \cong 3 \left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{3}.$$

当  $2m_b < \sqrt{s} < 2m_t$  时,

$$R \cong 3 \frac{1}{3} + \Delta R = 3 \frac{2}{3}, \quad \Delta R \cong 3 \left( \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}.$$

在图 17.3 中, 我们示意地画出了实验结果, 实验曲线与理论的

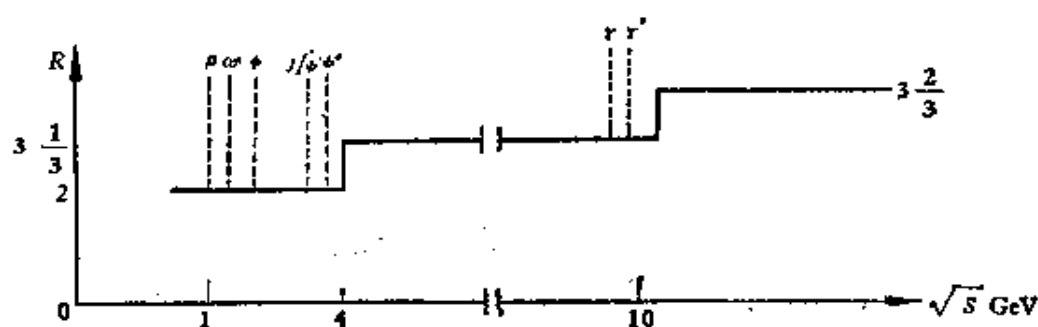


图 17.3

要求一致, 这种一致性说明了许多问题, 首先说明夸克的自旋为  $\frac{1}{2}$ , 如不然 (17.1) 和 (17.2) 式就不成立. 夸克自旋取任何其他值时将给出与 (17.1) 和 (17.2) 式完全不同的结果. 此外, 实验与理论的一致性还说明:



1. 夸克有分数电荷,其数值如第 2 页所示,
2. 每种味道的夸克有三种颜色;
3. 从实验曲线可以估计强子内部夸克的质量,结果表明夸克的“质量”相当小;
4. 在共振态外,夸克之间的强相互作用可以忽略[否则(17.1)和(17.2)式不成立].

这四个结果是相当不寻常的,但更令人惊奇的是,虽然我们可以用夸克解释许多问题,但是我们在终态中找不到自由夸克. 夸克不能跑出强子的现象称为夸克囚禁,夸克囚禁是当前粒子物理学中一个极为尖锐的问题. 夸克囚禁似乎说明夸克之间有很强的作用,但这是和上面第四点矛盾的;并且其它实验结果(电子或中微子与强子相互作用的总截面,强子的质量谱等)也支持强子内部夸克质量很小并且相互作用可以忽略的看法. 夸克囚禁和为什么观察不到有颜色的强子态,是我们以后要着重讨论的两个问题.

近年来粒子物理学有很大进步. 我们对粒子的性质和它们的相互作用已有相当多的了解. 但是,一些现在看来似乎很明显的事情,当初都是经过激烈争论才被人们承认的. 在四十年代中期,人们还不知道有弱相互作用和强相互作用的区别. 当时有人(M. Conversi, E. Pancini 和 O. Piccioni)测量了宇宙线中发现的一种介子(后来叫 $\mu$ 介子)通过碳时的吸收率,发现 $\mu^-$ 介子几乎一半被原子核俘获,另一半衰变掉. 这样似乎可以从衰变是通过弱作用进行的而推测出俘获也是通过弱作用进行的. 但事情并不这样简单,因为 $\mu^-$ 介子被原子吸收后,如果停留在绕核运动的外层轨道上,就很少有机会进入核内而被核俘获. 为了弄清楚这个问题,费米和泰勒(E. Teller)计算了 $\mu^-$ 从外层轨道进入内层轨道所需要的时间,发现这个时间是很短的,远比 $\mu^-$ 的寿命小. 于是推测出 $\mu^-$ 俘获的作用是很弱的, $\mu$ 介子不是汤川理论中所预言的介子. 另一方面,海森堡发现费米为解释 $\beta$ 衰变提出的费米型相互作用在短距离是发散的,因此,他认为这种相互作用可以产生强相互作用,而无需汤川理论. 1947年发现了 $\pi$ 介子,这是对汤川理

论的一个有力支持。1947 年底斯坦伯格从实验中发现  $\mu$  衰变的终态电子能量不是固定的，因此终态不是两个粒子，于是我们知道有三种弱过程：

$$\mu^- \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}, \quad (17.3)$$

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu, \quad (17.4)$$

$$N \rightarrow p + e + \bar{\nu}, \quad (17.5)$$

当时费米的研究生杨振宁、罗森布鲁斯 (M. Rosenbluth) 和我本人作了一个计算，发现 (17.3)–(17.5) 三种过程中相互作用耦合常数为同一数量级，因此我们猜测弱作用是有普适性的，并且可能是通过一种质量很大的中间玻色子传递的，它和  $e^- \bar{\nu}$ 、 $\mu^- \bar{\nu}$  及  $p \bar{n}$  的耦合常数相同(图 17.4)。这样就把弱相互作用与强相互作用区

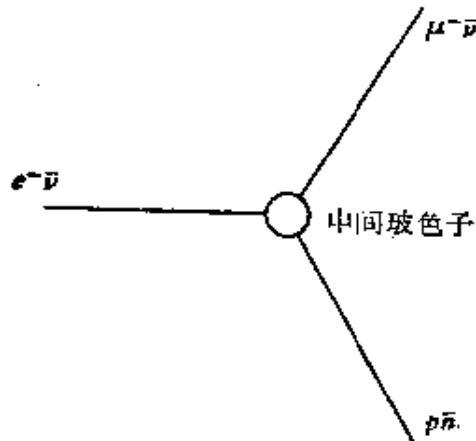


图 17.4

分开来了。近三十年来实验上发现了大量的强作用粒子，先是发现一批奇异粒子，紧跟着又发现了  $\Delta(1232)$  共振态，以后又发现了更多的强子。在这个基础上提出了夸克模型，现在差不多可以肯定强子都是由夸克组成的。然而，如前所述，夸克模型一方面能说明许多实验事实，另一方面也存在着严重困难。解决这些困难就是当代粒子物理学的重大任务。

在以下第十八章到第二十一章中，我们研究强相互作用的问题。特别是在第二十章和第二十一章中，我们将着重研究夸克囚禁，强子为什么无色等问题，在以后各章中，我们讨论弱相互作用和电磁相互作用的问题。

## 第十八章 $SU_3$ 对称性

1956年坂田提出所有强子均由三种粒子  $p, n, \Lambda$  组成的模型。接着在1959年,大贯、小川等人就把  $SU_3$  群应用到坂田模型上,提出了介子构成  $SU_3$  的一个8维表示,但是在他们的理论中,重子的地位是不清楚的。1961年盖尔曼和奈曼(Y. Neéman)提出重子也构成  $SU_3$  的8维表示,他们的理论获得了很大成功。1964年盖尔曼和茨魏格(G. Zweig)提出夸克模型。在现代的夸克模型中,  $SU_3$  群既用来表示味道的对称性,也用来表示颜色的对称性。

### § 18.1 $SU_3$ 对称性

为了说明什么是  $SU_3$  对称性,先回忆一下  $SU_2$  对称性。我们知道,强相互作用对于

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \rightarrow u \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

有不变性,其中  $u$  是一个  $2 \times 2$  矩阵,并且

$$u^\dagger u = 1, \quad \det u = 1,$$

$u^\dagger$  与  $u$  的关系是  $(u^\dagger)^a_b = (u^b_a)^*$ 。  $u$  矩阵的全体  $\{u\}$  构成一个群,称为  $SU_2$  群。令

$$q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}, \quad (18.1)$$

$q^i$  的上标  $i = 1, 2, 3$  既可以表示味道 ( $q^1 = u, q^2 = d, q^3 = s$ ), 也可以表示颜色。我们将说明,强作用对变换

$$q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \rightarrow uq \quad (18.2)$$

有某种不变性(对味道是近似不变的,对颜色是严格不变的),其中  $u$  是一个  $3 \times 3$  矩阵,

$$u = (u^a_b) = \begin{pmatrix} u^1_1 & u^1_2 & u^1_3 \\ u^2_1 & u^2_2 & u^2_3 \\ u^3_1 & u^3_2 & u^3_3 \end{pmatrix}, \quad (18.3)$$

并且

$$u^\dagger u = 1, \quad \det u = 1. \quad (18.4)$$

$u$  的全体  $\{u\}$  构成  $SU_3$  群.

下面我们先讨论  $SU_3$  群表示的一些性质,在下一节中再讨论它们的应用.

**定义 1**  $T^{i_1 \dots i_n}_{a_1 \dots a_m}$  称为  $(n, m)$  级的混合张量,假使当  $q^a \rightarrow u^a_b q^b$  时,

$$T^{i_1 \dots i_n}_{a_1 \dots a_m} \rightarrow u^{i_1}_{j_1} \dots u^{i_n}_{j_n} (u^\dagger)^{b_1}_{a_1} \dots (u^\dagger)^{b_m}_{a_m} T^{j_1 \dots j_n}_{b_1 \dots b_m}. \quad (18.5)$$

下面列举出三个特殊的张量.

1.  $\delta^i_j$  是一个  $(1, 1)$  级张量(利用  $u^\dagger u = 1$  可以验证它的张量性质:  $\delta^i_a \rightarrow u^i_j (u^\dagger)^b_a \delta^j_b = u^i_j (u^\dagger)^j_a = \delta^i_a$ ).

2.  $\epsilon^{ijk}$  是一个  $(3, 0)$  级张量. 它的定义是:

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } ijk \text{ 是 } 123 \text{ 的偶排列;} \\ -1, & \text{当 } ijk \text{ 是 } 123 \text{ 的奇排列;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(利用  $\det u = 1$  可以验证  $\epsilon^{ijk}$  的张量性质:

$$\epsilon^{ijk} \rightarrow \epsilon^{abc} u^i_a u^j_b u^k_c = \epsilon^{ijk} \det u = \epsilon^{ijk}).$$

3.  $\epsilon_{ijk}$  是一个  $(0, 3)$  级张量,它的定义是:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{当 } ijk \text{ 是 } 123 \text{ 的偶排列;} \\ -1, & \text{当 } ijk \text{ 是 } 123 \text{ 的奇排列;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(利用  $\det u^\dagger = 1$  可以验证  $\epsilon_{ijk}$  的张量性质).

**定义 2**  $T^{i_1 \dots i_n}_{a_1 \dots a_m}$  称为可约张量,假如它是一个  $(n, m)$  级张量,

并且

$$T_{b_1 \cdots b_i}^{i_1 \cdots i_s} = \sum T_{a_1 \cdots a_m}^{i_1 \cdots i_n} \text{ 乘 } (\delta^i_j, \epsilon^{abc}, \theta_{ijk}) \quad (18.6)$$

是一个不为零的  $(s, i)$  级张量, 其中  $s + i < n + m$ . 否则  $T_{a_1 \cdots a_m}^{i_1 \cdots i_n}$  称为不可约张量. 不可约张量有下面两条性质:

1.  $T_{a_1 \cdots a_m}^{i_1 \cdots i_n}$  对任何一对上指标  $(i_a, i_b)$ , 或任何一对下指标  $(a_r, a_s)$  是对称的. (这是显然的, 否则以  $\epsilon_{iaib} a_{m+1}$  或  $\epsilon^{ar as} a_{m+1}$  乘  $T_{a_1 \cdots a_m}^{i_1 \cdots i_n}$  时, 结果不等于零.)

2. 用  $\delta^a_i$  缩并  $T_{a_1 \cdots a_m}^{i_1 \cdots i_n}$  任何一对上下指标时, 结果为零.

表 18.1 列出了一些不可约张量的例子.

表 18.1

张 量	级	(表示的)维数	说 明
1	(0, 0)	①	
$T^i$	(1, 0)	③	
$T_a$	(0, 1)	③	1
$T^i_a$	(1, 1)	⑧	2
$T^{ij}$	(2, 0)	⑥	
$T_{ab}$	(0, 2)	⑥	
$T^{ijk}$	(3, 0)	⑩	3
$T_{abc}$	(0, 3)	⑤	
$T^{ij}_{ab}$	(2, 2)	⑳	4

说明 1.  $T^i$  和  $T_a$  是两种不同的张量, 这是与  $SU_2$  不同的 (参考本节后面的讨论).

2.  $T^i_a$  有 9 个分量, 但是它们满足条件  $T^i_i = 0$ , 所以只有 8 个独立分量.

3.  $T^{(1)}$  型独立分量有 3 个,  $T^{(12)}$  型独立分量有 6 个,  $T^{(23)}$  型独立分量只有一个, 所以  $T^{ijk}$  共有 10 个独立分量.

4.  $T^{ij}_{ab}$  有  $6 \times 6 = 36$  个分量, 但是它们满足 9 个条件  $T^{ij}_{af} = 0$ , 因此  $T^{ij}_{ab}$  有 27 个独立分量.

对一个维数为 ⑳ 的不可约张量  $T_{a_1 \cdots a_m}^{i_1 \cdots i_n}$ , 我们可以选出  $N$  个线性独立的分量  $v_1 \cdots v_N$ , 并把它们写成

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}. \quad (18.7)$$

在  $q \rightarrow uq$  变换下,  $v \rightarrow Uv$ , 其中  $U$  是一个  $N \times N$  矩阵. 矩阵的集合  $\{U\}$  称为群  $SU_3 = \{u\}$  在  $N$  维空间的不可约表示, 并以  $\otimes$  表示. 如果  $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$  是可约张量, 则表示  $\{U\}$  称为可约的. 不可约表示与可约表示的矩阵有不同的性质, 我们用下面的例子说明.

考虑一个任意的  $(2, 0)$  级张量  $T^{ij}$ . 令

$$\phi = \begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \\ T^{13} \\ T^{21} \\ T^{22} \\ T^{23} \\ T^{31} \\ T^{32} \\ T^{33} \end{pmatrix}. \quad (18.8)$$

在变换  $T^{ij} \rightarrow u^i_a u^j_b T^{ab}$  下,  $\phi \rightarrow U_\phi \phi$ , 其中  $U_\phi$  是一个  $9 \times 9$  矩阵. 由于  $T^{ij}$  不是不可约张量, 表示  $\{U_\phi\}$  是可约的. 把  $T^{ij}$  组合成一个对称张量和一个反对称张量:

$$S^{ij} = \frac{1}{2} (T^{ij} + T^{ji}), \quad (18.9)$$

$$A^{ij} = \frac{1}{2} (T^{ij} - T^{ji}). \quad (18.10)$$

显然,  $S^{ij}$  和  $a_k = \epsilon_{ijk} A^{ij}$  是两个不可约张量. 令  $v^1, \dots, v^6$  表示  $s^{11}, s^{22}, s^{33}, s^{12} = s^{21}, s^{23} = s^{32}, s^{13} = s^{31}$ , 并令

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^6 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (18.11)$$

在变换  $u$  下,  $v \rightarrow U_v v$ ,  $a \rightarrow U_a a$ , 其中  $U_v$  是一个  $6 \times 6$  矩阵,  $U_a$  是一个  $3 \times 3$  矩阵. 在作变换时,  $v^i$  只变成  $v^1, \dots, v^6$  的线性组合;  $a_i$  只变成  $a_1, a_2, a_3$  的线性组合,  $v$  和  $a$  不会混起来.  $\{U_v\}$  和  $\{U_a\}$  分别是  $SU_3$  的不可约表示 ⑥ 和 ③

令

$$\phi = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^6 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (18.12)$$

在变换  $u$  下,  $\phi \rightarrow U_\phi \phi$ , 其中

$$U_\phi = \left( \begin{array}{c|c} U_v & 0 \\ \hline 0 & U_a \end{array} \right) \quad (18.13)$$

是分块对角形的. 这样我们就把可约表示  $U_\phi$  约化成两个不可约表示之和. 一般说来, 任何  $SU_3$  的可约表示都可以约化成不可约表示之和, 而对不可约表示则不能做这种约化.

设  $\{U\}$  是  $N$  维空间的表示, 在这个空间内换基:  $v \rightarrow \chi = \mathcal{S}v$ , 其中  $\mathcal{S}$  是一个非奇的  $N \times N$  矩阵. 在变换  $u$  下,  $v \rightarrow v' = Uv$  于是  $\chi \rightarrow \mathcal{S}U\mathcal{S}^{-1} \cdot \mathcal{S}v = \mathcal{S}U\mathcal{S}^{-1}\chi$ . 因此换基使表示  $\{U\}$  变成  $\{\mathcal{S}U\mathcal{S}^{-1}\}$ .  $\{\mathcal{S}U\mathcal{S}^{-1}\}$  称为是与  $\{U\}$  等价的表示.  $\{U\}$  和  $\{\mathcal{S}U\mathcal{S}^{-1}\}$  有相同的结构. 如果  $\{U\}$  是不可约的 (可约的), 则  $\{\mathcal{S}U\mathcal{S}^{-1}\}$  也是不可约的 (可约的).

在这里顺便讨论一下  $SU_2$  群的一些问题. 假定  $\{u\} = SU_2$ , 即  $u$  为  $2 \times 2$  矩阵, 并且  $uu^\dagger = 1$ ,  $\det u = 1$ , 我们要说明  $\{u^*\} = \{u\}$ , 即  $\{u^*\}$  实际上也是  $SU_2$  群.  $SU_2$  群元素的最一般形式为

$$u = e^{i\theta \cdot \sigma} = \cos \theta + i\sigma \cdot \hat{\theta} \sin \theta, \quad (18.14)$$

其中  $\hat{\theta} = \theta/\theta$ ,  $\theta$  是一个实矢量. 因为

$$e^{i\pi\sigma_2/2} u^* e^{-i\pi\sigma_2/2} = (i\sigma_2)(\cos \theta - i\sigma^* \cdot \hat{\theta} \sin \theta)(-i\sigma_2)$$

$$= \cos \theta + i \sigma \cdot \hat{\theta} \sin \theta,$$

所以

$$e^{i\pi\sigma_2/2} u^* e^{-i\pi\sigma_2/2} = u. \quad (18.15)$$

另一方面, 设  $u_0$  是  $SU_2$  中一固定元素, 则

$$\{u\} = \{u_0 u\} = \{u u_0^\dagger\} = \{u_0 u u_0^\dagger\}.$$

令  $u_0 = e^{i\pi\sigma_2/2}$ , 于是 (18.15) 式说明  $\{u^*\} = \{u\}$ .

在  $SU_2$  变换下, 张量  $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$  的上指标随  $u$  变换, 下指标随  $u^\dagger$  变换, 而  $(u^\dagger)^a_b = (u^b_a)^*$ , 并且  $u^* = u_0^{-1} u u_0$ , 所以  $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$  的变换给出的表示等价于一个只有  $n+m$  个上指标的张量  $T^{i_1 \dots i_{n+m}}$  给出的表示. 从研究群表示论的观点看来, 可以只讨论后一类张量. 在  $SU_2$  变换下,  $e^{ij}$  ( $e^{12} = -e^{21} = 1$ ,  $e^{11} = e^{22} = 0$ ) 和  $e_{ij}$  ( $e_{12} = -e_{21} = 1$ ,  $e_{11} = e_{22} = 0$ ) 是两个反对称张量 (用  $\det u = \det u^\dagger = 1$  可以证明它们的张量性质). 我们可以用  $e_{ij}$  去约化  $T^{i_1 \dots i_n}$ , 因此不可约张量  $T^{i_1 \dots i_n}$  必须是对称的. 对称张量  $T^{i_1 \dots i_n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 的变换给出  $SU_2$  群的所有不可约表示.

把旋量  $N$  写成  $N = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ , 利用  $\xi$  和  $\eta$  的多项式, 可以得到各种不可约张量, 它们给出  $SU_2$  群的所有不可约表示. 各种自旋的粒子的波函数, 可以用这些不可约张量表示, 例如如表 18.2 所示.

表 18.2

级	张 量	(表示的)维数	自 旋
0	1	①	0
1	$\xi, \eta$	②	$\frac{1}{2}$
2	$\xi^2, \xi\eta, \eta^2$	③	1
3	$\xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3$	④	$\frac{3}{2}$
4	$\xi^4, \xi^3\eta, \xi^2\eta^2, \xi\eta^3, \eta^4$	⑤	2

利用不可约张量指标对称的性质, 容易把张量的乘积约化成



不可约张量。例如，由旋量  $e = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix}$  和  $N = \begin{pmatrix} N^1 \\ N^2 \end{pmatrix}$  可以作出  $e^i N^j$ 。由  $e^i N^j$  可以组合出两个不可约张量： $\frac{1}{2}(e^i N^j + e^j N^i)$  和  $\epsilon_{ij} e^i N^j$ 。前者是 3 维不可约表示，后者是 1 维表示。所以

$$\textcircled{2} \times \textcircled{2} = \textcircled{3} + \textcircled{1}.$$

用多项式表示不可约张量，可以很容易地求出克莱布施-高登系数。

再顺便讨论一下转动群  $SO_3$  的不可约张量。 $SO_3 = \{u\}$ ，其中  $u$  是  $3 \times 3$  矩阵，并具有如下性质： $u^* = u$  (实矩阵)， $\tilde{u}u = 1$ ， $\det u = 1$ 。在  $SO_3$  变换下， $\delta_{ij}$  和  $\epsilon_{ijk}$  是张量 (因为  $\tilde{u}u = 1$  和  $\det u = 1$ )。利用这两个张量可以约化可约张量。因此不可约张量  $T_{i_1 \dots i_n}$  必须是对称的和无迹的。表 18.3 列举了  $SO_3$  的前几级的不可约张量。

表 18.3

级	张 量	(表示的)维数	自旋	说明
0	1	①	0	
1	$T_i = (x, y, z)$	③	1	1
2	$T_{ij}$ $(x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2z^2, xy, yz, zx)$	⑤	2	2
3	$T_{ijk}$	⑦	3	3

说明 1. 张量  $T_i, T_{ij}, \dots$ ，可以用各阶球谐函数表示。

2.  $T_{ij} = T_{ji}$ ，同时  $T_{ii} = 0$ ，所以独立分量只有 5 个。

3. 对称张量  $T_{ijk}$  满足条件  $T_{iia} = 0$  ( $a = 1, 2, 3$ ) 所以独立分量共只有 7 个。

作为一个应用，考虑  $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ， $2\pi^0$ ，其终态  $I = 0$ 。我们说明分支比

$$\frac{\text{衰变率}(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\text{衰变率}(K^0 \rightarrow 2\pi^0)} = 2.$$

设  $a_k^\dagger (a_k^{\dagger 1}, a_k^{\dagger 2}, a_k^{\dagger 3})$  是同位旋矢量场  $\varphi$  的产生算符 (1, 2, 3 是同位旋指标)； $\pi^\pm, \pi^0$  的产生算符分别为

$$a(\pi_{\mathbf{k}}^{\pm})^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\mathbf{k}}^{1\dagger} \pm i a_{\mathbf{k}}^{2\dagger}), \quad (18.16)$$

$$a(\pi_{\mathbf{k}}^0)^{\dagger} = a_{\mathbf{k}}^{3\dagger}.$$

终态是一个同位旋标量,可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle = & [a(\pi_{\mathbf{k}}^+)^{\dagger} a(\pi_{-\mathbf{k}}^-)^{\dagger} \\ & + a(\pi_{\mathbf{k}}^-)^{\dagger} a(\pi_{-\mathbf{k}}^+)^{\dagger} + a(\pi_{\mathbf{k}}^0)^{\dagger} a(\pi_{-\mathbf{k}}^0)^{\dagger}] |0\rangle. \end{aligned} \quad (18.17)$$

此式说明分枝比等于 2.

现在回到  $SU_3$ . 假定  $A^i_j$  和  $B^i_j$  是两个属于 ⑤ 的不可约张量. 因此,  $A^i_i = B^i_i = 0$ . 令  $T^{ij}_{ab} = A^i_a B^j_b$ , 这是一个  $(2, 2)$  级可约张量. 利用  $\delta^i_a$ ,  $\epsilon^{ijk}$  和  $e_{abc}$ , 可以把  $T^{ij}_{ab}$  约化成下列的不可约张量:

不可约张量	(表示的)维数
$S = A^i_a B^a_i$	①
$F^i_a = A^i_j B^j_a - B^j_j A^i_a$	⑧
$D^i_a = A^i_j B^j_a + B^j_j A^i_a - \frac{2}{3} \delta^i_j S$	⑧
$A^i_a B^j_b \epsilon^{abk} + (\text{对 } i, j, k \text{ 循环的项})$	⑩
$A^i_a B^j_b e_{jic} + (\text{对 } a, b, c \text{ 循环的项})$	⑩
$A^i_a B^j_b + (\text{对称项}) - (\text{迹})$	⑳

其中  $F^i_a$  对  $A, B$  是反对称的,  $D^i_a$  对  $A, B$  是对称的. 所以两个不可约表示 ⑧ 的乘积,可按下式分解成不可约表示之和:

$$\textcircled{8} \times \textcircled{8} = \textcircled{1} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{10} + \textcircled{10} + \textcircled{27}. \quad (18.18)$$

## § 18.2 物理应用

我们把  $SU_3$  用于味空间. 假定

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \rightarrow Uq, \text{ 同时 } c, b, \dots \text{ 不变} \quad (18.19)$$

( $U$  是  $SU_3$  群元素,即  $U$  是  $3 \times 3$  矩阵,同时  $U^{\dagger}U=1$ ,  $\det U=1$ ),

则  $0^-$  介子  $\pi^{\pm,0}, K^{\pm,0}, \eta$  和  $\frac{1}{2}^+$  重子  $\Sigma^{\pm,0}, p, n, \Xi^-, \Xi^0, \Lambda$  都各自按  $SU_3$  群的 8 维表示变换. 如果强作用是  $SU_3$  对称的, 则每个 8 维表示内各种粒子的质量相同. 事实上并不如此, 这说明强作用不是严格  $SU_3$  对称的. 以下我们先讨论  $0^-$  介子和  $\frac{1}{2}^+$  重子怎样填充 8 维表示, 然后讨论它们的质量以及  $\frac{3}{2}^+$  重子的问题.

令矩阵  $M = (M^a_b)$ , 其中  $M^a_a = 0$ ,  $M^a_b$  构成 8 维不可约表示空间的基:

$$M^a_b \sim q^a q_b - \frac{1}{3} \delta^a_b q^c q_c, \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (18.20)$$

在变换  $q \rightarrow Uq$  下,

$$M^a_b \rightarrow U^a_i (U^\dagger)^j_b M^i_j, \quad (18.21)$$

或写成矩阵形式

$$M \rightarrow U M U^\dagger. \quad (18.22)$$

$0^+$  介子可以用  $M^a_b$  表示为

$$\left. \begin{aligned} \pi^0 &= (M^1_1 - M^2_2)/\sqrt{2}, \quad \pi^+ = M^1_2, \quad \pi^- = M^2_1, \\ \eta^0 &= (-M^1_1 - M^2_2 + 2M^3_3)/\sqrt{6}, \quad K^+ = M^1_3, \\ K^0 &= M^2_3, \quad \bar{K}^0 = M^3_2, \quad K^- = M^3_1. \end{aligned} \right\} \quad (18.23)$$

解上面这组关系式 (利用  $M^a_a = 0$ ), 可以用  $\pi, K, \eta$  表示  $M^a_b$ :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \eta^0 \end{pmatrix}. \quad (18.24)$$

在这里  $\pi^{0,\pm}, \dots$  等既可以看成是场算符, 亦可以看成是态矢量. (18.24) 式的右边也可以用下面的简单方法得出. 把  $M^a_b$  和  $\pi^{\pm,0}, K^{\pm,0}, \eta^0$  看成是 8 维表示空间中两组正交归一化的基. 基矢  $a$  在基矢  $b$  上的投影等于基矢  $b$  在基矢  $a$  上的投影. 因此, 从

(18.23) 可以直接读出 (18.24).

$0^-$  介子和  $\frac{1}{2}^+$  重子的量子数有对应关系, 如图 18.1 所示. 盖

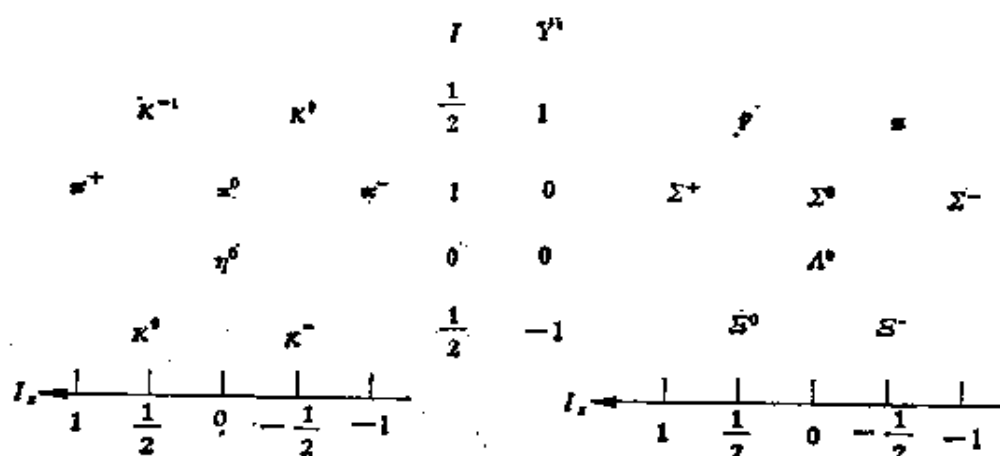


图 18.1

尔曼和奈曼建议  $\frac{1}{2}^+$  重子也属于 8 维表示. 它们可以表示成

$$B \Rightarrow (B^a_b) \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0 \end{pmatrix}. \quad (18.25)$$

其中  $B^a_b$  是一个 8 维不可约张量. 在  $SU_3$  变换下,

$$B^a_b \rightarrow U^a_i (U^\dagger)^j_b B^i_j, \quad (18.26)$$

或写成矩阵形式

$$B \rightarrow U B U^\dagger. \quad (18.27)$$

现在研究质量公式. 把强作用的哈密顿量  $H$  分成两部分:

$$H = H_{\text{对称}} + H_{\text{不对称}}, \quad (18.28)$$

$H_{\text{对称}}$  在  $SU_3$  变换下不变,  $H_{\text{不对称}}$  则不是不变的. 当然, 这种分法不是唯一的, 因为  $H_{\text{不对称}} + \Delta H_{\text{对称}} = H'_{\text{不对称}}$ . 在强作用下超荷  $Y$

和同位旋  $I$  是守恒的, 所以  $H_{\text{不对称}}$  的量子数  $Y=0, I=0$ . (为了了解这一点, 可以回忆一下核子和电磁场的相互作用哈密顿密度:  $\mathcal{H} = ie\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \frac{1+\tau_3}{2} \psi A_\mu = ie\psi_p^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \psi_p A_\mu$ . 电荷守恒和  $\mathcal{H}$  的电荷数为零是密切相关的. 如果我们用电荷数不为零的  $\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \psi = \psi_p^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \psi_n$  代替  $\mathcal{H}$  中的  $\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \frac{1+\tau_3}{2} \psi$ , 显然导致电荷不守恒.) 把  $H_{\text{不对称}}$  写成  $SU_3$  不可约张量的形式. 如果我们用  $q^i = (u, d, s)$  的多项式表示这个不可约张量, 并注意夸克的量子数如下:

	$I$	$I_3$	$Q$	$Y = 2(Q - I_3)$
$u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$d$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$s$	$0$	$0$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

就可以看出, 最低阶的  $Y=0, I=0$  的张量分量是  $\textcircled{8}_3$ , 其变换性质与  $\eta^0$  相同.

**定理** 假使  $H_{\text{不对称}} = \textcircled{8}_3$ , 用  $H_{\text{不对称}}$  作为微扰, 算到一级近似, 则八重态的质量满足

$$3m_\eta^2 - 4m_K^2 + m_\pi^2 = 0, \quad (18.29)$$

$$3m_A - 2(m_N + m_\Sigma) + m_\Sigma = 0. \quad (18.30)$$

十重态的质量满足

$$\begin{aligned} m_{\Sigma^*(1385)} - m_{\Delta(1232)} &= m_{\Xi^*(1530)} - m_{\Sigma^*(1385)} \\ &= m_{\Omega(1672)} - m_{\Xi^*(1530)}. \end{aligned} \quad (18.31)$$

这两组关系式叫盖尔曼-大久保 (Gell-Mann-Okubo) 公式.

**证明** 为了得到上面的公式, 我们计算

$$\Delta E = \langle B_i^t | H_{\text{不对称}} | B_b^a \rangle. \quad (18.32)$$

$H_{\text{不对称}}$  可以唯象地表示成

$$H_{\text{不对称}} = \sum \text{常数} \cdot B_i^{\dagger t} B_b^a. \quad (18.33)$$

在  $SU_3$  变换下,  $B \rightarrow UBU^\dagger$ ,  $B^\dagger \rightarrow UB^\dagger U^\dagger$ , 因此  $B^\dagger$  也属于 8 维表示, 即  $\mathbf{\bar{8}} = \mathbf{\bar{8}}$ . 按 (18.18) 式,  $\mathbf{\bar{8}} \times \mathbf{\bar{8}}$  包含两个  $\mathbf{\bar{8}}$ , 所以  $\Sigma$  常数  $\cdot B^{\dagger i} B^a_b$  中包含两个  $\mathbf{\bar{8}}_3^3$  项, 令

$$\left. \begin{aligned} a^i_j &= (B^\dagger)^i_a B^a_j, \\ b^i_j &= (B^\dagger)^a_i B^i_{a,j}. \end{aligned} \right\} \quad (18.34)$$

则上述两个  $\mathbf{\bar{8}}_3^3$  项可以用  $a^3_3$  和  $b^3_3$  表示, 故

$$H_{\text{不对称}} = \alpha a^3_3 + \beta b^3_3, \quad (18.35)$$

其中  $\alpha, \beta$  是两个常数. 由 (18.25) 和 (18.35) 式, 我们有

$$\begin{aligned} H_{\text{不对称}} &= \alpha \left( \bar{p}p + \bar{n}n + \frac{2}{3} \bar{\Lambda}\Lambda \right) \\ &+ \beta \left( \bar{\Sigma}^-\Sigma^- + \bar{\Sigma}^0\Sigma^0 + \frac{2}{3} \bar{\Lambda}\Lambda \right). \end{aligned} \quad (18.36)$$

把 (18.36) 代入 (18.32) 式, 可以求出

$$\begin{aligned} \Delta E_\Sigma &= 0, \quad E_\Lambda - E_\Sigma = \frac{2}{3}(\alpha + \beta), \\ E_N - E_\Sigma &= \alpha, \quad E_\Xi - E_\Sigma = \beta. \end{aligned} \quad (18.37)$$

消去  $\alpha, \beta$  就有

$$3E_\Lambda - 2E_N - 2E_\Xi + E_\Sigma = 0. \quad (18.38)$$

对照 (18.24) 和 (18.25) 式, 并注意  $E_K = E_{\bar{K}}$ , 由 (18.38) 式可推导出

$$3E_\eta - 4E_K + E_\pi = 0, \quad (18.39)$$

其中

$$E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}. \quad (18.40)$$

取  $|\mathbf{p}| \gg m_i$ , 则可以从 (18.38) 和 (18.39) 式得到

$$3m_\Lambda^2 - 2m_N^2 - 2m_\Xi^2 + m_\Sigma^2 = 0, \quad (18.41)$$

$$3m_\eta^2 - 4m_K^2 + m_\pi^2 = 0. \quad (18.42)$$

对于重子  $m_i \gg \delta m_i$ ,  $m_i^2 = (m + \delta m_i)^2 \cong m^2 + 2m\delta m_i$ ,

因此 (18.41) 式又可以写成

$$3m_\Lambda - 2m_N - 2m_\Xi + m_\Sigma = 0. \quad (18.43)$$

(18.42) 和 (18.43) 式就是我们所要证明的 (18.29) 和 (18.30) 式.

注意,我们不能在质心系计算介子的能量修正,这是由于  $m_\pi \cong 0$ , 当  $\mathbf{p} \rightarrow 0$  时微扰论不是好的近似. 对于重子,则不妨在  $\mathbf{p} = 0$  的坐标系中直接计算能量修正.

现在考虑  $\frac{3}{2}^+$  重子,

	$S$	$I$
$\Delta(1232)$	0	$\frac{3}{2}$
$\Sigma^*(1385)$	-1	1
$\Xi^*(1530)$	-2	$\frac{1}{2}$
$\Omega^-(1672)$	-3	0

我们假定它们属于 10 维不可约表示,并用对称张量  $D^{abc}$  表示:

$$D^{abc} = \frac{1}{6} (q_p^a q_q^b q_k^c + q_p^b q_q^c q_k^a + q_p^c q_q^a q_k^b + q_p^a q_q^c q_k^b + q_p^b q_q^a q_k^c + q_p^c q_q^b q_k^a), \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{k} = 0. \quad (18.44)$$

$\frac{3}{2}^+$  重子的波函数可以写成

$$\begin{aligned} \Omega^- &= sss, \\ \Xi^{*0} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (ssu + sus + uss), \\ \Xi^{*-} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (ssd + sds + dss), \\ \Sigma^{*-} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (sun + usn + nus), \text{ 等等}, \\ \Delta^{++} &= uuu, \text{ 等等}. \end{aligned} \quad (18.45)$$

在  $\frac{3}{2}^+$  重子内三个夸克的自旋是平行的.

在  $\mathbb{10} \times \mathbb{10}$  中只包含一个  $\mathbb{8}$ :

$$\cdot O^i_j = D_{abi} D^{abi} - \frac{1}{3} D_{abc} D^{abc} \delta^i_j, \quad (18.46)$$

所以在计算  $\langle D_{abc} | H_{\text{不对称}} | D^{ijk} \rangle$  时, 可以取

$$H_{\text{不对称}} = \alpha \bar{s}s, \quad (18.47)$$

其中  $\alpha$  是常数. [严格说,  $O_3^s \sim \bar{s}s - \frac{1}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$ , 把  $SU_3$  变换下的标量  $-\frac{1}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$  并入  $H_{\text{对称}}$ , 就有 (18.47) 式.]

(18.47) 式说明在十重态中计算  $H_{\text{不对称}}$  的矩阵元时, 可以认为每个  $s$  夸克比  $u, d$  夸克的质量大  $\alpha$ ,  $m_s > m_u = m_d$ . 这样从  $\frac{3}{2}^+$  的波函数表示式 (18.48) 式中, 立即可以看出

$$m_{\bar{\Sigma}} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_{\Sigma} = m_{\Sigma} - m_{\Delta},$$

这就是要证明的 (18.31) 式. 我们还可以用另一方法证明 (18.31) 式. 比较 (18.44) 和 (18.45) 式, 我们有

$$\begin{aligned} D^{333} &= \bar{\Sigma}^- \\ D^{313} &= D^{331} = D^{133} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{\Sigma}^{*0}, \\ D^{131} &= D^{113} = D^{311} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma^{*+}, \\ D^{111} &= \Delta^{++}. \end{aligned} \quad (11.48)$$

取

$$H_{\text{不对称}} = \alpha O_3^s = \alpha \left\{ D_{ab3} D^{ab3} - \frac{1}{3} D_{abc} D^{abc} \right\}. \quad (18.49)$$

把 (18.48) 式代入上式, 就有

$$\begin{aligned} H_{\text{不对称}} &= \alpha \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) \bar{\Sigma} \Sigma + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 3\right) \bar{\Sigma}^{*0} \Sigma^{*0} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 3\right) \bar{\Sigma}^{*+} \Sigma^{*+} - \frac{1}{3} \bar{\Delta}^{++} \Delta^{++} + \dots \right\} \\ &= \alpha \left\{ \frac{2}{3} \bar{\Sigma} \Sigma + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^{*0} \Sigma^{*0} + 0 \cdot \bar{\Sigma}^{*+} \Sigma^{*+} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \bar{\Delta}^{++} \Delta^{++} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (18.50)$$

从这个式子也立即可以得到 (18.31) 式.



## 第十九章 量子色动力学

利用量子色动力学 (QCD), 有可能解释夸克囚禁问题, 这是我们要讨论它的原因. 量子色动力学是建立在 1954 年杨振宁和密尔斯 (R. L. Mills) 提出的规范场理论的基础上的. 1956 年内山曾把杨振宁和密尔斯的理论推广. 但是在很长时间内, 这种理论并没有应用到实际的物理问题上去. 直到七十年代才有了广泛的应用, QCD 是重要应用之一.

杨振宁和密尔斯的规范场理论是量子电动力学的推广. 在量子电动力学中, 光子场  $A_\mu$  和电子场  $\psi$  的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m) \psi, \quad (19.1)$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu, \quad D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu.$$

(19.1) 式中  $\mathcal{L}$  对下面的规范变换是不变的:

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta} \psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu. \quad (19.2)$$

其中  $\theta$  是与  $x_\mu$  无关的实数. 这种不变性导致电流  $j_\mu = ie\psi^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \psi$

守恒:  $\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ . (19.1) 式中的  $\mathcal{L}$  还有第二类规范不变性, 这就是对于变换:

$$\left. \begin{aligned} \psi &\rightarrow e^{-i\theta(x)} \psi, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_\mu}, \end{aligned} \right\} (19.3)$$

$\mathcal{L}$  是不变的. 这是一种定域不变性,  $\theta(x)$  依赖于坐标  $x_\mu$ . 杨振宁和密尔斯的理论就是第二类规范不变性观念的一种推广.

作为一个例子, 我们先研究  $SU_2$  规范场. 这是非阿贝尔规范

场最简单情形, 设有两种场, 一种是自旋  $\frac{1}{2}$  的同位旋空间的旋量场  $\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}$  [例如  $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  或  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ ], 另一种是在同位旋空间和四维空间-时间中都是矢量的规范场  $\mathbf{V}_\mu$ . 它们的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{V}_{\mu\nu}^2 - \phi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m) \phi, \quad (19.4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{V}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathbf{V}_\mu + g \mathbf{V}_\mu \times \mathbf{V}_\nu, \\ D_\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \frac{1}{2} g \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  是  $2 \times 2$  的泡利矩阵, 它们有如下的性质:

$$\left. \begin{aligned} \text{tr } \tau_i \tau_j &= 2\delta_{ij}, \\ [\tau_i, \tau_j] &= 2i\epsilon_{ijk} \tau_k, \\ \{\tau_i, \tau_j\} &= 2\delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

定义

$$\left. \begin{aligned} V_\mu &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_\mu, \\ V_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_{\mu\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

可以把 (19.1) 式中的  $\mathcal{L}$  改写成

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \text{tr}(V_{\mu\nu} \cdot V_{\mu\nu}) - \phi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m) \phi, \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig V_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (19.8)$$

我们要证明 (19.8) 式中的  $\mathcal{L}$  对规范变换

$$\left. \begin{aligned} V_\mu &\rightarrow u V_\mu u^\dagger - \frac{i}{g} \frac{\partial u}{\partial x_\mu} u^\dagger, \\ \phi &\rightarrow u \phi \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

是不变的, 其中  $u = u(x)$  是  $SU_2$  群的元素, 它是一个  $2 \times 2$  矩阵. 由于有限的变换可以用无穷小的变换连乘得出, 我们只考虑无穷小变换:

$$u = 1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta},$$

其中  $\boldsymbol{\theta}$  是无穷小量, 并且它的三个分量都是实数. 在这个变换下, 保留  $\boldsymbol{\theta}$  的一次项, 得

$$\begin{aligned} u V_\mu u^\dagger &= \left(1 - \frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}\right) \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}_\mu \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}\right) \\ &= V_\mu - \frac{i}{4} [\tau_i, \tau_j] \theta_i (V_\mu)_j \\ &= V_\mu + \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{V}_\mu). \end{aligned}$$

所以  $\mathbf{V}_\mu$  的无穷小变换为

$$\mathbf{V}_\mu \rightarrow \mathbf{V}_\mu + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{V}_\mu - \frac{1}{g} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\mu}. \quad (19.10)$$

为了证明  $\mathcal{L}$  的不变性, 可以分两步进行. 首先, 我们假定  $\boldsymbol{\theta}$  是和坐标  $x_\mu$  无关的. 于是  $\mathbf{V}_\mu$  的变换简化成  $\mathbf{V}_\mu \rightarrow \mathbf{V}_\mu + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{V}_\mu$ , 并且

$$\mathbf{V}_{\mu\nu} \rightarrow \mathbf{V}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{V}_{\mu\nu}. \quad (19.11)$$

这表示  $\mathbf{V}_{\mu\nu}$  在同位旋空间绕  $\boldsymbol{\theta}$  方向转一小角度  $|\boldsymbol{\theta}|$ . 另一方面,  $V_\mu$  的变换也可写成  $V_\mu \rightarrow u V_\mu u^\dagger$ , 所以  $D_\mu \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i g u V_\mu u^\dagger$ , 同时  $\phi \rightarrow u \phi$ , 因此

$$D_\mu \phi \rightarrow u D_\mu \phi. \quad (19.12)$$

由 (19.11) 和 (19.12) 式, 即可看出  $\mathcal{L}$  是规范不变的. 现在我们假定  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$  是与  $x_\mu$  有关的. 在这种情形下  $\mathbf{V}_\mu$  按 (19.10) 式变换, 其中包含非齐次项  $-\frac{1}{g} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\mu}$ . 在  $\mathbf{V}_{\mu\nu}$  的变换中与  $\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\mu}$  有关的部分为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\mu} \right) + g \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\mu} \right) \\ &\quad \times \mathbf{V}_\nu + g \mathbf{V}_\mu \times \left( -\frac{1}{g} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\nu} \right), \end{aligned}$$

这个量是等于零的, 因此  $\mathbf{V}_\mu$  仍按 (19.11) 式变换. 在  $D_\mu\psi$  的变换式中与  $\frac{\partial\theta}{\partial x_\mu}$  有关的部分为

$$-\frac{i}{2}g\boldsymbol{\tau}\cdot\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial\theta}{\partial x_\mu}\right)\psi+\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\psi,$$

它也等于零, 因此,  $D_\mu\psi$  仍按 (19.12) 式变换. 由于 (19.11) 和 (19.12) 式仍成立, 所以在  $\theta$  与  $x_\mu$  有关时,  $\mathcal{L}$  也是规范不变的.

现在我们把规范群由  $SU_2$  推广到  $SU_3$ . 假定  $u=u(x)$  是  $SU_3$  群的元素, 即它是  $3\times 3$  矩阵, 并且  $u^\dagger u=1$ ,  $\det u=1$ .  $u$  可以用盖尔曼矩阵  $\lambda^a(a=1,\cdots 8)$  表示.  $\lambda^a$  的表示式如下:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (19.13)$$

这 8 个  $\lambda^a$  矩阵是厄米的, 并且是无迹的:

$$\begin{aligned} \lambda^{a\dagger} &= \lambda^a, \\ \text{tr}\lambda^a &= 0. \end{aligned} \quad (19.14)$$

此外, 它们还有下面的性质:

$$\text{tr}(\lambda^a\lambda^b) = 2\delta^{ab},$$

$$\begin{aligned}
[\lambda^a, \lambda^b] &= 2if^{abc}\lambda^c, \\
\{\lambda^a, \lambda^b\} &= 2d^{abc}\lambda^c + \frac{4}{3}\delta^{ab}, \quad (19.15)
\end{aligned}$$

其中  $f^{abc}$  是全反对称的,  $d^{abc}$  是全对称的, 它们的非零分量为

$abc$	$f^{abc}$	$abc$	$d^{abc}$
123	1	118	$1/\sqrt{3}$
147	$1/2$	146	$1/2$
156	$-1/2$	157	$1/2$
246	$1/2$	228	$1/\sqrt{3}$
257	$1/2$	247	$-1/2$
345	$1/2$	256	$1/2$
367	$-1/2$	338	$1/\sqrt{3}$
458	$\sqrt{3}/2$	344	$1/2$
678	$\sqrt{3}/2$	355	$1/2$
		366	$-1/2$
		377	$-1/2$
		448	$-1/(2\sqrt{3})$
		558	$-1/(2\sqrt{3})$
		668	$-1/(2\sqrt{3})$
		778	$-1/(2\sqrt{3})$
		888	$-1/\sqrt{3}$

无穷小变换可以写成

$$u = 1 + i\alpha - \frac{i}{2}\lambda^a\theta^a,$$

其中  $\alpha$  和  $\theta^a$  都是独立的无穷小参数, 由  $\det u = 1$  可以看出,  $\alpha = 0$ , 因此,

$$u = 1 - \frac{i}{2}\lambda^a\theta^a. \quad (19.16)$$

由  $u^\dagger u = 1$ , 可以看出  $\theta^{a*} = \theta^a$ , 所以  $SU_3$  群的元素中包含八个实参数。

在量子色动力学中,规范群是  $SU_3$ , 它的元素  $u$  是颜色空间中的变换. 我们考虑两种场,一种是夸克场  $\phi_q^a$ , 其中  $q = u, d, s, c, \dots$  是味道指标,  $a = 1, 2, 3$  是颜色指标;还有一种是规范场  $V_\mu^a$ , 其中  $a = 1, \dots, 8$  是颜色指标. 我们定义

$$\left. \begin{aligned} V_\mu &= \frac{1}{2} \lambda^a V_\mu^a, \\ V_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \lambda^a V_{\mu\nu}^a = \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} V_\mu - ig[V_\mu, V_\nu], \end{aligned} \right\} (19.17)$$

或

$$V_{\mu\nu}^a = \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\nu^a - \frac{\partial}{\partial x_\nu} V_\mu^a + gf^{abc} V_\mu^b V_\nu^c, \quad (19.18)$$

把(19.17)式化成(19.18)式时,我们利用了

$$\begin{aligned} -ig[V_\mu, V_\nu] &= -ig \frac{1}{4} [\lambda^b, \lambda^c] V_\mu^b V_\nu^c \\ &= \frac{1}{2} \lambda^a gf^{abc} V_\mu^b V_\nu^c. \end{aligned}$$

量子色动学的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr}(V_{\mu\nu} \cdot V_{\mu\nu}) - \sum_q \phi_q^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + m_q) \phi_q, \quad (19.19)$$

其中

$$\phi_q = \begin{pmatrix} \phi_q^1 \\ \phi_q^2 \\ \phi_q^3 \end{pmatrix}, \quad D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - igV_\mu. \quad (19.20)$$

我们证明(19.19)式中的  $\mathcal{L}$  对于规范变换

$$\left. \begin{aligned} V_\mu &\rightarrow u V_\mu u^\dagger - \frac{i}{g} \frac{\partial u}{\partial x_\mu} u^\dagger, \\ \phi &\rightarrow u \phi \end{aligned} \right\} \quad (19.21)$$

是不变的.

首先假定  $u$  是与坐标  $x_\mu$  无关的. 这时规范变换简化成  $V_\mu \rightarrow V'_\mu = u V_\mu u^\dagger$ , 因此

$$\begin{aligned}
 V_{\mu\nu} \rightarrow V'_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} V'_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} V'_\mu - ig[V'_\mu, V'_\nu] \\
 &= u V_{\mu\nu} u^\dagger,
 \end{aligned} \tag{19.22}$$

同时

$$\begin{aligned}
 D_\mu \phi &\rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig u V_\mu u^\dagger \right) u \phi \\
 &= u \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig V_\mu \right) \phi,
 \end{aligned}$$

或写成  $D_\mu \phi \rightarrow u D_\mu \phi.$  (19.23)

由 (19.22) 和 (19.23) 式, 容易看出  $\mathcal{L}$  在规范变换下是不变的.

再考虑  $u = 1 - \frac{i}{2} \lambda^a \theta^a(x)$  与  $x_\mu$  有关的情形, 其中  $\theta^a(x)$  是无穷小量. 我们可以像在  $SU_2$  规范场情形中一样, 证明  $\mathcal{L}$  的不变性. 在规范变换下,

$$\begin{aligned}
 V_\mu &\rightarrow u V_\mu u^\dagger - \frac{i}{g} \frac{\partial u}{\partial x_\mu} u^\dagger \\
 &= V_\mu - \frac{i}{2} \theta^a [\lambda^a, V_\mu] - \frac{1}{2g} \lambda^a \frac{\partial \theta^a}{\partial x_\mu}.
 \end{aligned} \tag{19.24}$$

于是

$$\begin{aligned}
 V_{\mu\nu} &\rightarrow u V_{\mu\nu} u^\dagger - ig \left[ -\frac{1}{2g} \lambda^a \frac{\partial \theta^a}{\partial x_\mu}, V_\nu \right] \\
 &\quad - ig \left[ V_\mu, -\frac{1}{2g} \lambda^a \frac{\partial \theta^a}{\partial x_\nu} \right] + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[ -\frac{i}{2} \theta^a \right] [\lambda^a, V_\nu] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[ -\frac{i}{2} \theta^a \right] [\lambda^a, V_\mu] = u V_{\mu\nu} u^\dagger.
 \end{aligned} \tag{19.25}$$

同时  $D_\mu \phi$  变换如下:

$$\begin{aligned}
 D_\mu \phi &\rightarrow u D_\mu \phi + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( -\frac{i}{2} \theta^a \right) \lambda^a \phi \\
 &\quad - ig \left( -\frac{1}{2g} \lambda^a \frac{\partial \theta^a}{\partial x_\mu} \right) \phi = u D_\mu \phi.
 \end{aligned} \tag{19.26}$$

因此, 在  $u$  与  $x_\mu$  有关时  $\mathcal{L}$  在规范变换下仍是不变的.

在以下两章中, 我们把量子色动力学用于强子问题.

## 第二十章 色介常数和夸克囚禁

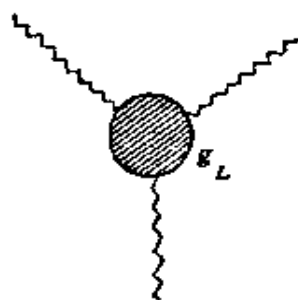
在这一章里,我们说明量子色动力学(QCD)的真空极化是反屏蔽性的,并引进真空的色介常数的观念. 色介常数  $\kappa_L$  与 QCD 系统的体积  $L^3$  有关,我们将证明:  $L^3$  愈大,则  $\kappa_L$  愈小. 此外我们还说明,如果取强子内部真空的色介常数  $\kappa_i = 1$ ,而假定强子外部真空是完全或几乎完全抗色的 ( $\kappa_\infty = 0$  或  $\ll 1$ ),就可以解释夸克囚禁和为什么观察不到有色强子态.

### § 20.1 色介常数和真空的抗色性

在量子色动力学中,除了夸克囚禁问题外,还存在红外发散的困难. 与 QED 比较, QCD 的规范场  $V_a$  多两种自作用顶角,如图 20.1 所示. 此外,规范场粒子是零质量的,它的传播子  $\propto \frac{1}{k^2}$ ,因此, QCD 的红外发散比 QED 的红外发散要严重得多,几乎达到不可收拾的地步. 在以下的讨论中,我们希望这两个问题可以同时解决.



图 20.1



在外线上  $k \sim L^{-1}$

图 20.2

为了阻止红外发散,我们把整个 QCD 系统放在一个体积有限的盒子内,体积  $= L^3$ . 令  $g_L$  为长波极限下(动量  $k \sim L^{-1}$ )定义的重正化耦合常数.  $g_L$  是与  $L$  的大小有关的量. 作为约定,



我们取  $g = g_{L=\text{质子半径}}$  为标准耦合常数。我们用下式定义体积  $L^3$  中真空的色介常数  $\kappa_L$ :

$$g_L^2 = \frac{g^2}{\kappa_L}. \quad (20.1)$$

**定理** 如果  $L > l$ , 则  $\kappa_L < \kappa_l$ .

这个定理表示盒子愈大, 则色介常数愈小。我们指出, 对于低阶的微扰论展开, 这个定理是成立的。由微扰论可以得到

$$\frac{\kappa_L}{\kappa_l} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi} \frac{g^2}{4\pi} \left( 11 - \frac{2}{3} N_q \right) \ln \frac{L}{l} + O(g^4)}, \quad (20.2)$$

其中  $N_q$  是夸克味道的数目, 假定  $N_q < 16 \frac{1}{2}$ , 由 (20.2) 式易见, 如果  $L > l$ , 则  $\kappa_L < \kappa_l$ 。在本章的最后部分, 我们将证明, 对于  $g^2$  的任意阶, 上述定理成立。现在, 我们先对这个定理进行一些讨论。

在电磁学中, 两个距离为  $r$  的静止电荷  $e$  之间的作用力等于  $\frac{e^2}{\kappa r^2}$ ,  $\kappa$  = 介电常数。  $\kappa$  本身没有绝对的意义, 因为改变  $\kappa$  同时调整  $e^2$ , 使  $e^2/\kappa$  不变, 则作用力不变。所以, 通常取真空的  $\kappa = 1$ 。但是对于不同介质,  $\kappa$  的比值是有意义的。对于 QCD, 色介常数  $\kappa_L$  也是这样的。我们可以规定  $\kappa_{L=\text{质子半径}} = 1$ , 于是  $\kappa_{\text{真空}} = \kappa_{\infty} < 1$ 。  $\kappa_{\infty} < 1$  意味着真空极化是反屏蔽性的。这和 QED 中真空极化是屏蔽性的不同。在 QED 中, 真空极化的屏蔽性来源于自旋为  $\frac{1}{2}$  的电子; 在 QCD 中真空极化的反屏蔽性来源于自旋为 1 的规范场量子。由微扰论的结果, 很容易看出, 这种反屏蔽性 [这表现为 (20.2) 式分母上  $\frac{11}{2\pi} \frac{g^2}{4\pi} > 0$ ], 但是这种计算是和所取规范有关的, 因此, 对这种反屏蔽性的解释, 道理还不是很清楚的。夸克在真空极化中起屏蔽作用, 这表现在 (20.2) 式中  $N_q$  前的系数是负

的。  $N_g$  不能太大，当  $N_g$  超过 17 时，真空极化就变成屏蔽性的了。

我们把 QCD 中  $\kappa_\infty = 0$  的真空称为完全抗色介质，把  $\kappa_\infty \ll 1$  的真空称为几乎完全抗色介质。在下一节中我们将说明，在前一情况下，夸克是完全囚禁的，在后一情况下，夸克是几乎完全囚禁的。

我们的理论是相对论不变的。真空中零质量的规范场量子的速度  $c/\sqrt{\kappa\mu} = c$ ，因此  $\kappa\mu = 1$ ，其中  $\kappa$  是真空的色介常数， $\mu$  是真空的色“磁”导率。由此式我们可以把色介常数看成是一个洛伦兹不变量。

## § 20.2 夸克囚禁

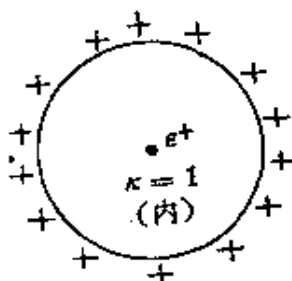
为了说明怎样产生夸克囚禁，先考虑一个经典电磁学中的假想问题。在量子电动力学中，作为一种约定，通常取真空态的介电常数  $\kappa_{\text{真空}} = 1$ 。于是可以证明所有物理介质的  $\kappa > 1$ 。这一点可以从下式看出：

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (20.3)$$

$\mathbf{D}$  为电位移矢量， $\mathbf{E}$  为电场强度， $\mathbf{P}$  为极化矢量。由于在  $\mathbf{E}$  作用下所有原子的偶极矩  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{E}$  是同方向的，所以产生一种屏蔽效应，使  $\kappa > 1$ 。我们假想在经典电磁学中有一种介质，其介电常数为

$$\kappa = \kappa_g \ll 1 \text{ 或 } \cong 0, \quad (20.4)$$

即这种假想介质是反屏蔽性的。假定我们把一个很小的电荷  $e$  放



外部：  $\kappa = \kappa_g \ll 1$

图 20.3

在这种假想介质中，则不管  $e$  多么小，它都会在自己周围打出一个洞来，在洞内  $\kappa = 1$ ，但是洞外  $\kappa = \kappa_g$ ，如图 20.3 所示。实际上，由于在洞内壁上的感应电荷和  $e$  有相同的符号，如果我们要减小洞的大小，就必须克服  $e$  和感应电荷之间的排斥力作功。如果把洞完全消灭掉，就必须作无穷大的功。因此洞不可

能消失。(这种情况和通常  $\kappa > 1$  的介质完全不同, 设想一个同样的洞被制造出来了, 但相应的感应电荷和  $e$  有相反的符号。由于电荷之间的库仑力, 这个洞将自动收缩为零。于是如果  $e$  充分小, 介质仍将是均匀的)。这样无论  $e$  多么小, 当  $\kappa_{\text{介}} \rightarrow 0$  时, 介质中都要发生以洞的形式出现的不均匀性。

我们可以估计这种洞的半径  $R$  的大小。令  $D_{\text{外}}$  和  $E_{\text{外}}$  分别为在  $r = R$  处洞外  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的法向分量。同样,  $D_{\text{内}}$  和  $E_{\text{内}}$  为  $r = R$  处洞内相应的分量。对于球形洞, 我们有

$$D_{\text{内}} = E_{\text{内}} = D_{\text{外}} = \frac{e}{R^2},$$

$$E_{\text{外}} = \frac{e}{\kappa_{\text{介}} R^2},$$

其中  $e$  为这个电荷分布的总电量。我们假定电荷  $e$  分布在一个非零的体积内。洞内的电场能量是有限的, 并与  $\kappa_{\text{介}}$  无关。洞外的电场能量由  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$  的体积分给出, 它与  $\kappa_{\text{介}}^{-1}$  成正比。因此, 当  $\kappa_{\text{介}} \rightarrow 0$  时, 电场的总能量  $U_{\text{电}}$  为

$$U_{\text{电}} \sim \frac{1}{2} \frac{e^2}{\kappa_{\text{介}} R}. \quad (20.5)$$

此外, 为了制造出这样一个洞还需要能量  $U_{\text{洞}}$ 。  $U_{\text{洞}}$  的值是  $R$  的函数。当  $R$  大时,  $U_{\text{洞}}$  应为正比于体积的项加上正比于表面积的项, 等等。我们可以把它写成

$$U_{\text{洞}} = \frac{4\pi}{3} R^3 p + 4\pi R^2 s + \dots, \quad (20.6)$$

其中  $p, s, \dots$  为正的常数。系统的总能量为

$$M = U_{\text{电}} + U_{\text{洞}}. \quad (20.7)$$

在图(20.4)中, 我们示意地画出了  $M$ 。  $M$  的极小值  $M_*$  由  $\frac{dM}{dR} = 0$  决定, 在取近似  $U_{\text{洞}} \cong \frac{4}{3} \pi R^3 p$  时,

$$M_* \sim \frac{4}{3} \left( \frac{e^2}{2\kappa_{\text{介}}} \right)^{3/4} (4\pi p)^{1/4}, \quad (20.8)$$

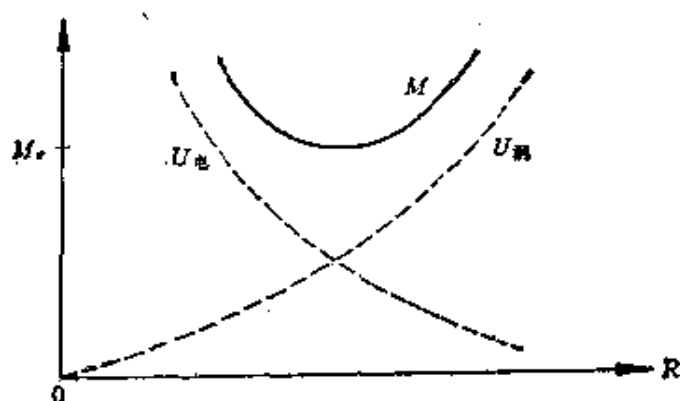


图 20.4

相应的半径  $R = \left( \frac{e^2}{8\pi\kappa_{\text{介}}p} \right)^{1/4}$ , 因此我们可以得到结论: 如果电荷  $e \neq 0$ , 则  $R \neq 0$ , 并且总能量

$$M_e \rightarrow \infty, \text{ 当 } \kappa_{\text{介}} \rightarrow 0. \quad (20.9)$$

不难证明, 不取近似  $U_{\text{洞}} \cong \frac{4}{3} \pi R^3 p$ , 仍可以得到同样的结论.

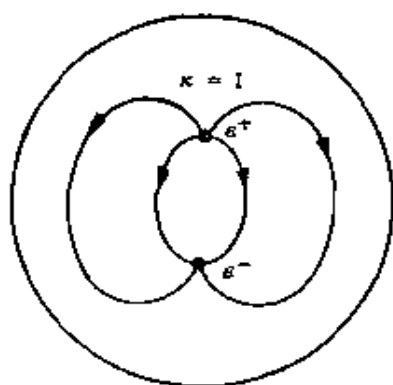
现在我们用一个电偶极分布来代替单电荷分布, 即取两个电量分别为  $e^+$  和  $e^-$  的分布. 容易看出, 当  $\kappa_{\text{介}}$  足够小时, 在极小能量状态中, 仍有围绕两个电荷的洞. 和以前一样, 在洞内  $\kappa = 1$ , 在洞外  $\kappa = \kappa_{\text{介}}$ . 当  $\kappa_{\text{介}} \rightarrow 0$  时, 在洞内壁上, 电场应当平行于壁, 所以  $\mathbf{D}$  在洞外为零, 如图 20.5 所示. 于是  $U_{\text{电}}$  和  $M_{e^+e^-}$  是有限的, 即

$$M_{e^+e^-} = \text{有限值},$$

当

$$\kappa_{\text{介}} \rightarrow 0. \quad (20.10)$$

如果我们试图把两个电荷  $e^+$  和  $e^-$  分开到无穷远, 则由 (20.9) 式可以看出, 我们需要作无穷大的功. 这是在这个假想问题中夸克囚禁的模拟.



外部:  $\kappa = \kappa_{\text{介}} \rightarrow 0$

图 20.5

现在回到量子色动力学中相应的问题上来. 假定真空是一种完全 (或几乎完全) 的抗色介质. 做与上述同样的讨论, 可以看出, 不管什

么时候，只要有夸克或反夸克，在这些粒子周围就必然有不均匀性。我们可以把它们称为袋，或畴结构，或孤粒子解。在袋内部，色介常数  $\kappa = 1$ ，但在外部， $\kappa = \kappa_\infty = 0$  或  $\ll 1$ 。如果总“颜色”是非零的，则当  $\kappa_\infty \rightarrow 0$  时，袋的质量为无穷大[与(20.9)式类似]。然而，像(20.10)式一样，假如在袋内为颜色单态，比如(见图 20.6)

介子:  $\bar{q}^a q^a$ , 或重子:  $\epsilon_{abc} q^a q^b q^c$ ,

( $a, b, c = 1, 2, 3$  为颜色指标), 则当  $\kappa_\infty \rightarrow 0$  时袋的质量仍是有限的。这样，夸克囚禁就可以用真空是完全抗色的或几乎是完全抗色的来“解释”。在前一情况下，夸克是完全囚禁的，在后一情况下，几乎是完全囚禁的。

上述关于强子的袋或孤粒子的模型，也可以用来说明强子的

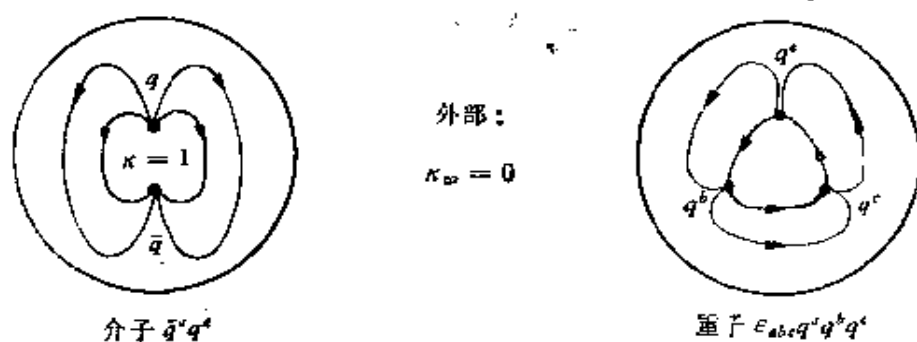


图 20.6

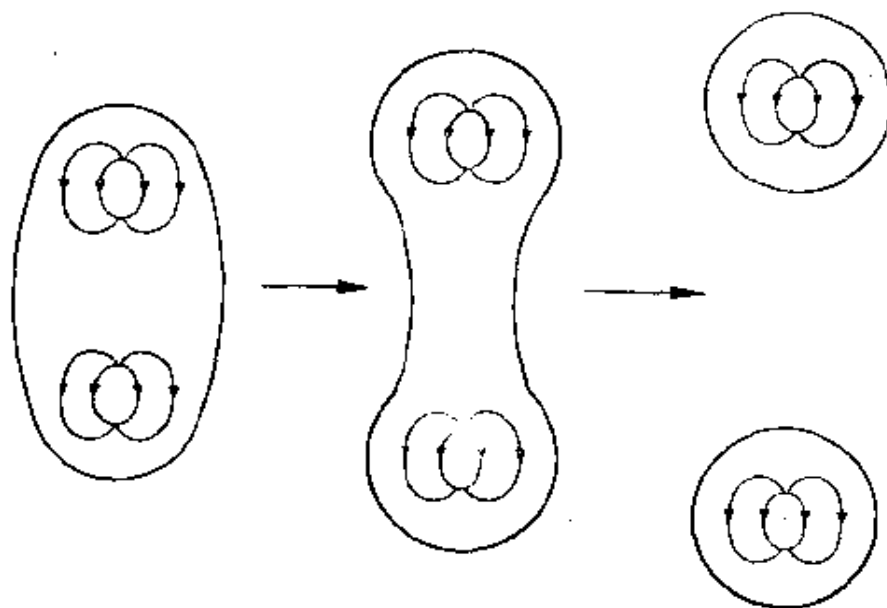


图 20.7

反应过程,例如,一个介子吸收了一个光子。由于在袋内夸克的质量是很小的,很容易产生一对新的夸克,现在袋内有两对夸克。这两对夸克向相反方向运动,把袋拉长,并断开成为两个颜色单态的袋,如图 20.7 所示。这就是介子吸收一个光子变成两个介子的过程。当然,介子吸收能量足够大的光子,也可以产生许多对夸克,最后变成许多强子。

我们假定  $\kappa_\infty = 0$  或  $\ll 1$ ,这意味着  $g_\infty \rightarrow \infty$  或  $\gg 1$ ,这是一种超强耦合极限。我们指出,这在我们的理论中并不造成困难。在其他物理问题中,也有类似的情况。例如,两个 He 原子之间的相互作用势能如图 20.8 所示。当  $r < a$ , 势能  $V \cong \infty$ ; 当  $r > a$ ,

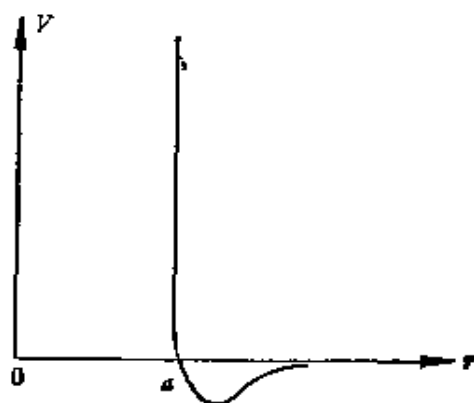


图 20.8

$V$  很小。由于强势能是排斥性的,两个原子并不进入强作用区域,因此,强作用并不带来任何困难。按照通常的方法,是用一个刚球势能代替强排斥部分,这导致一个新的边界值问题:两个 He 原子的距离限制在  $r \geq a$  的区域。在这个区域内, $V$  很小可以看成是一种微扰。

在图 20.6 中我们看到,当  $\kappa_\infty \rightarrow 0$  时,即当  $g_\infty^2 = g^2/\kappa_\infty \rightarrow \infty$  时,夸克被囚禁在  $\kappa = 1$  的袋内。袋外是超强作用区域,在那里  $g_\infty^2 \rightarrow \infty$ ,但是夸克并不进入这种地方。由于洛伦兹不变性,在现在的情况下,边界值问题的解是相对论性的孤粒子。围绕孤粒子解作微扰论展开计算可观察量时,所用的展开参数是袋内的耦合常数  $g$ 。这样就避免了强耦合的困难。(只有当人们企图在均匀

背景上作简单化的平面波展开时，才必须用  $g_0$  作为展开参数。这时会出现类似于在 He-He 问题中做平面波展开时完全相同的困难。)

量子色动力学中的夸克囚禁和量子电动力学中的超导性有一些可以互相对比的地方。当我们从 QED 转到 QCD 时，我们用色电场  $\mathbf{E}^a$  代替磁场  $\mathbf{H}$ ，用强子外部的 QCD 真空代替超导体，用强子内部代替超导体外部的 QED 真空。因此在图 20.9 中，左图的超导体内部对应于右图强子外部的 QCD 真空，左图的 QED 真空对应于右图强子内部。在超导现象中，磁场被排斥出超导体；在 QCD 中，色电场被束缚在强子内部。这种情况可以总结如表 20.1

表 20.1

QED		QCD
超导现象		强子
$\mathbf{H}$	$\longleftrightarrow$	$\mathbf{E}^a$
$\mu_{\text{内}} = 0$	$\longleftrightarrow$	$\kappa_{\text{真空}} = 0$
$\mu_{\text{真空}} = 1$	$\longleftrightarrow$	$\kappa_{\text{内}} = 1$
内部	$\longleftrightarrow$	外部
外部	$\longleftrightarrow$	内部

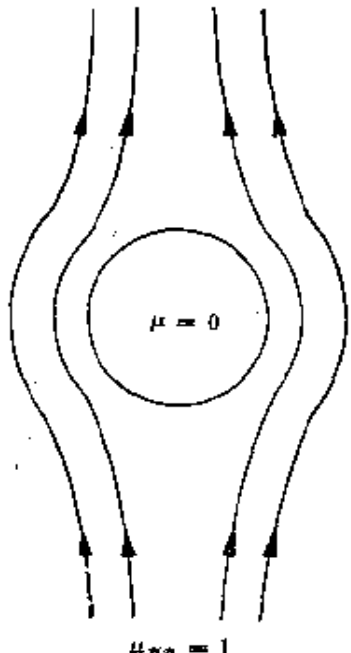
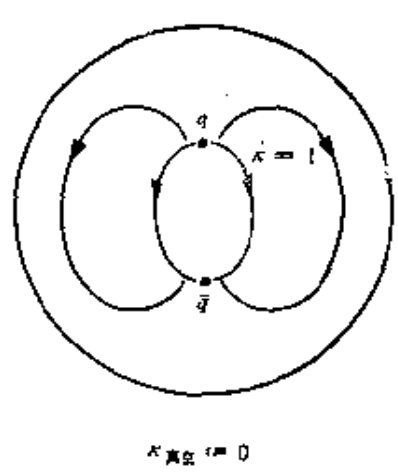



图 20.9

所示。

超导现象虽然和夸克囚禁有许多可以对比之处，但是两者仍有很大区别。超导转变是一种相变；超导体的作用是线性的，两块超导体放到一起还是超导体。但是强子不属于相变现象，QCD 是非线性理论，大范围的  $\kappa = 1$  是不可能的，强烈的非线性效应会使它回到  $\kappa_\infty = 0$  的情形。因此，利用瞬子解，把相变概念应用于 QCD 的作法是不对的。

在这里我们顺便指出，通常把 QCD 中的规范场量子称为胶子是不恰当的。因为规范场既可以在夸克之间产生吸引力，也可以产生排斥力。把夸克约束在强子内的作用力不是规范场产生的，而是周围  $\kappa_\infty \rightarrow 0$  的真空产生的。强子很象液体中的气泡，液体对气泡施加一个压力；同样真空对夸克也有压力作用，这个压力阻止夸克从强子中跑出来。

### § 20.3 证明当 $L > l$ 时 $\kappa_L < \kappa_l$

现在我们来证明 § 20.1 中叙述过的定理： $\kappa_L < \kappa_l$ ，如果  $L > l$ 。

为简单起见，考虑只包含规范场  $V_\mu$  的系统。为清楚起见，我们引入一个紫外截断动量  $\Lambda$ 。把未重正化耦合常数记为  $g_0$ 。整个系统放在一个有限体积  $L^3$  内。令  $\kappa_L$  和  $g_L$  分别为真空的色介常数和重正化耦合常数。 $\kappa_L$  和  $g_L$  都是  $g_0$ ， $L$  和  $\Lambda$  的函数。由量纲的考虑，可以看出它们依赖于  $g_0$  和乘积  $L\Lambda$ ，即

$$\left. \begin{aligned} \kappa_L &= F(L\Lambda, g_0), \\ g_L &= G(L\Lambda, g_0). \end{aligned} \right\} (20.11)$$

我们研究两个不同的体积  $l^3$  和  $L^3$ ，但是  $\Lambda$  和  $g_0$  相同。从 (20.1) 式可以得到

$$\frac{\kappa_L}{\kappa_l} = \left( \frac{g_l}{g_L} \right)^2. \quad (20.12)$$

正如 (20.11) 一样，我们有



$$g_l = G(l\Lambda, g_0), \quad (20.13)$$

其逆为  $g_0 = g_0(l\Lambda, g_l)$ . 消去  $g_0$ , 我们可以把  $g_L$  表示成  $L\Lambda, l\Lambda$  和  $g_l$  的函数:

$$g_L = G(L\Lambda, g_0(l\Lambda, g_l)). \quad (20.14)$$

因为理论是可重正的, 我们可以假定 (20.14) 式的极限  $\Lambda \rightarrow \infty$  是存在的. 在此极限下,

$$g_L = g\left(\frac{l}{L}, g_l\right) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} G(L\Lambda, g_0(l\Lambda, g_l)).$$

此式也可以写成

$$g_L = g(\lambda, g_l), \quad (20.15)$$

其中

$$\lambda = \frac{l}{L}. \quad (20.16)$$

在  $\lambda = 1$  时 (20.15) 式变成

$$g_l = g(1, g_l). \quad (20.17)$$

因为  $g_L = G(L\Lambda, g_0)$  与  $l$  无关, 故

$$\left(\frac{\partial g_L}{\partial l}\right)_{L, \Lambda, g_0} = 0.$$

所以

$$\left[\frac{\partial}{\partial \ln \lambda} + \left(\frac{\partial g_l}{\partial \ln l}\right)_{\Lambda, g_0} \frac{\partial}{\partial g_l}\right] g(\lambda, g_l) = 0. \quad (20.18)$$

令

$$\beta = -\left(\frac{\partial g_l}{\partial \ln l}\right)_{\Lambda, g_0}, \quad (20.19)$$

则 (20.18) 式可以写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial \ln \lambda} - \beta \frac{\partial}{\partial g_l}\right) g(\lambda, g_l) = 0. \quad (20.20)$$

此式通常称为重正化群方程. (20.20) 式的解的形式为

$$g_L = g(\lambda, g_l) = f(z), \quad (20.21)$$

其中

$$z = \ln \lambda + \int^{g_l} \frac{dg'}{\beta(g')} \quad (20.22)$$

( $\int_{g_l}^{g_1} \frac{dg'}{\beta(g')}$  是一个不定积分, 包含一个任意的相加常数)。为了证明定理, 只需要说明对所有的  $z$ ,

$$\frac{df(z)}{dz} < 0. \quad (20.23)$$

这是由于

$$L \frac{\partial g_l}{\partial L} = - \frac{\partial}{\partial \ln \lambda} g(\lambda, g_l) = - \frac{df(z)}{dz},$$

所以 (20.23) 意味着

$$\frac{\partial g_l}{\partial L} > 0. \quad (20.24)$$

于是由 (20.1) 或 (20.12) 式, 立即得到所要证明的定理。

令  $f^{-1}(z)$  为  $f(z)$  的反函数, 即  $f^{-1}(f(z)) = z$ 。由 (20.21) 式, 我们有

$$z = f^{-1}(g(\lambda, g_l)). \quad (20.25)$$

在 (20.22) 和 (20.25) 式中令  $\lambda = 1$ , 并注意  $g(1, g_l) = g_l$  就可以得到

$$z = \int_{g_l}^{g_1} \frac{dg'}{\beta(g')} \quad \text{和} \quad z = f^{-1}(g_l).$$

把  $g_l$  写成  $g$ , 就有

$$f^{-1}(g) = \int^g \frac{dg'}{\beta(g')}, \quad (20.26)$$

其中  $g$  是一个任意变量。从微扰论可以得到

$$\beta(g) = -\frac{11}{16\pi^2} g^3 - \frac{102}{(16\pi^2)^2} g^5 + O(g^7). \quad (20.27)$$

[ $O(g^4)$  的计算见 D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 1342 (1973); H. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 1346 (1973).

$O(g^5)$  的计算见 W. E. William, *Phys. Rev. Lett.*, **33**, 244.

(1974).] 因为  $\beta(g)$  是  $g$  的奇函数, 故  $\int^g \frac{dg'}{\beta(g')}$  是  $g$  的偶函数,

我们可以只考虑  $g \geq 0$  的区域。从 (20.26) 式可以看出有两种情

况:

(a)  $\beta(g) = 0$  仅在  $g = 0$  成立. 在这种情况下, (20.26) 式对所有的  $g$  有定义, 因此  $g$  可以从 0 变到  $\infty$ .

(b)  $\beta(g) = 0$  在  $g = 0, \bar{g}, \bar{g}', \dots$  成立, 其中  $\bar{g} > 0, \bar{g}' > \bar{g}, \dots$ . 在  $\beta(g) = 0$  的地方  $\int^g \frac{dg'}{\beta(g')}$  奇异,  $g$  的物理区只能在 0 到  $\bar{g}$  之间, 或  $\bar{g}$  到  $\bar{g}'$  之间, 等等.

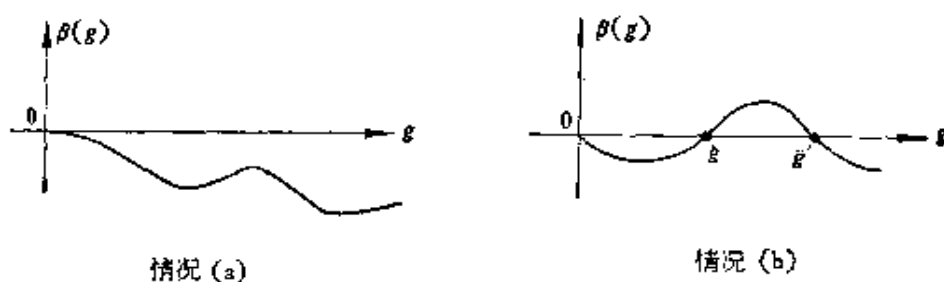


图 20.10

在情况 (a) 下,  $\frac{df^{-1}(g)}{dg} = \frac{1}{\beta(g)} < 0$  总是成立的. 把  $g$  写成  $g = f(z)$ , 则其反函数  $f^{-1}(g) = z$ , 于是上面的不等式可以写成  $\frac{dz}{df(z)} < 0$ , 从而

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{df(z)}} < 0. \quad (20.28)$$

此式对所有  $z$  成立, 因此我们所要证明的定理成立. (20.26) 式也

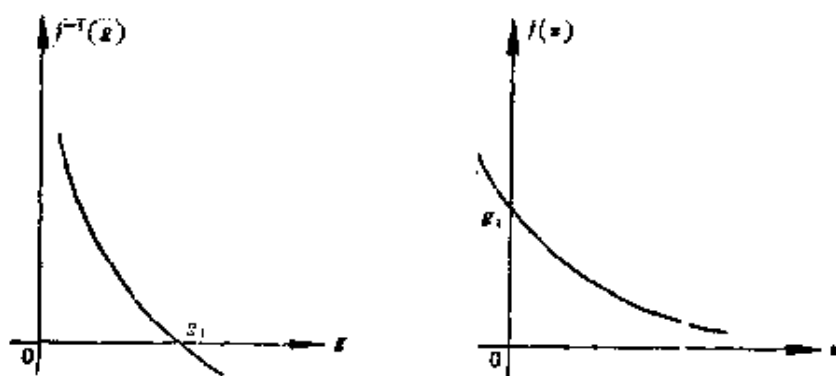


图 20.11

可写成

$$f^{-1}(g) = \int_{g_1}^g \frac{dg'}{\beta(g')}, \quad (20.29)$$

其中  $g_1$  是  $f^{-1}(g) = 0$  的根 (见图 20.11), 把 (20.22) 式写成

$$z = \ln \frac{l}{L} + \int_{g_1}^{g_L} \frac{dg'}{\beta(g')}, \quad (20.30)$$

当  $L \rightarrow 0$  时,  $z \rightarrow \infty$ , 于是  $g_L = f(z) \rightarrow 0$ . 这个性质叫渐近自由. 用渐近自由可以解释部分子模型. 这个模型是与实验符合的. 当  $L \rightarrow \infty$  时,  $z \rightarrow -\infty$ , 这时  $g_L = f(z) \rightarrow \infty$ , 相应的  $\kappa_\infty = 0$ .

在情况(b)下, 为了解释部分子模型, 必须假定物理区为  $0 \leq g \leq \bar{g}$ . 当  $L \rightarrow 0$  时,  $g_L \rightarrow 0$ ; 当  $L \rightarrow \infty$  时,  $g_L \rightarrow \bar{g}$ . 在物理区内  $\frac{df^{-1}(g)}{dg} = \frac{1}{\beta(g)} < 0$ , 于是像情况(a)一样, 可以得到

$$\frac{df(z)}{dz} < 0. \text{ 至此定理证毕.}$$

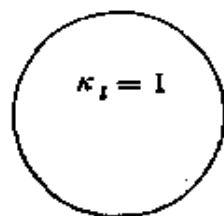
## 第二十一章 孤粒子(或袋)模型

在上一章中我们已经说明,如果真空的色介常数  $\kappa_\infty \rightarrow 0$ , 则围绕夸克形成袋或孤粒子解. 当袋内夸克处于颜色单态时,袋的质量有限,并且使夸克脱离袋需要作无穷大的功. 强子可以看成是这种无色的袋. 在这一章里,我们给出一个可以得到这种袋的 QCD 的唯象拉格朗日密度  $\mathcal{L}$ . 利用此  $\mathcal{L}$ , 在零阶近似下,我们计算了强子的质量,质子的电荷半径和磁矩,中子与质子的磁矩比,  $g_A/g_V$  等,并导出了强子质量谱的  $SU_6$  对称性. 然后我们考虑 QCD 辐射修正和夸克的质量差,说明了  $SU_6$  简并的消除,讨论了  $m_\pi \cong 0$  和  $\eta \rightarrow \eta'$  反常的问题. 所有这些在理论上是自洽的,并与实验基本符合. 此外,我们还说明 MIT 袋模型和 SLAC 袋模型是我们理论的两个极限情况.

### § 21.1 以量子色动力学为基础的唯一象拉氏密度

按照上一章的讨论,我们取强子内部真空的色介常数  $\kappa_l = 1$  ( $l =$  强子半径),并假定强子外部真空的色介常数  $\kappa_\infty = 0$  或  $\ll 1$  (见图 21.1). 既然色介常数  $\kappa$  与空间位置有关,根据相对论,一般说它就是空间-时间坐标的函数. 唯象地说它就是一种场. 在上一章里,我们已经指出  $\kappa$  是一个洛伦兹标量. 所以  $\kappa$  是一种唯象的标量场. 实际上它是一种长程有序场,描写 QCD 的长程集体效应,因此只有低频成分,没有高频成分. 我们可以引进另一种唯象的标量场  $\sigma$ ,  $\sigma$  线性地依赖于  $\kappa$ :

$$\sigma(x) \propto 1 - \kappa(x),$$



$\kappa_\infty \cong 0$

图 21.1

或者

$$\sigma(x) = \sigma_{\text{真空}} \frac{1 - \kappa(x)}{1 - \kappa_{\infty}}. \quad (21.1)$$

因为  $\kappa_{\infty} \cong 0$ , 故上式可以写成

$$\sigma(x) = \sigma_{\text{真空}}(1 - \kappa(x)). \quad (21.2)$$

我们取 QCD 的唯象拉氏密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \kappa V_{\mu\nu}^a V_{\mu\nu}^a - \psi^\dagger \gamma_4 (\gamma_\mu D_\mu + f\sigma + m) \psi \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} \right)^2 - U(\sigma), \end{aligned} \quad (21.3)$$

其中  $\psi$  是夸克场; 规范场  $V_\mu^a$  包含在  $V_{\mu\nu}^a$  和  $D_\mu^a$  中,

$$V_{\mu\nu}^a = \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\nu^a - \frac{\partial}{\partial x_\nu} V_\mu^a + g f^{abc} V_\mu^b V_\nu^c, \quad (21.4)$$

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2} i g \lambda^a V_\mu^a, \quad (21.5)$$

式中  $\lambda^a$  是盖尔曼矩阵,  $f^{abc}$  是  $SU_3$  群的结构常数. 势能  $U(\sigma)$  在  $\sigma = \sigma_{\text{真空}}$  处有一个绝对极小值, 在  $\sigma = 0$  处, 有一个局部极小值 (见图 21.2),

$$U(\sigma_{\text{真空}}) = 0, \quad U(0) = p > 0. \quad (21.6)$$

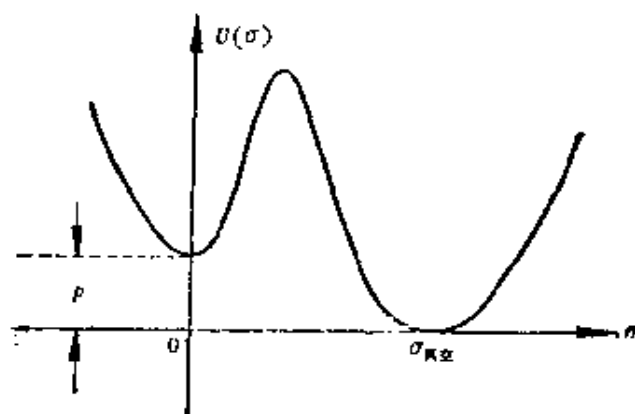


图 21.2

$U(\sigma)$  的细致形式并不重要, 但是, 我们假定它的非线性程度很高, 使袋的边界厚度很小.

在(21.3)式中,  $\sigma$  场以两种方式和夸克耦合. 一是由于  $\mathcal{L}$  中

有  $ig\phi^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\frac{\lambda^a}{2}\phi V_\mu^a$  项和  $-\frac{1}{4}\kappa V_{\mu\nu}^a V_{\mu\nu}^a$  项,  $\sigma$  场可以通过规范场与夸克耦合;二是  $\mathcal{L}$  中包含  $-f\sigma\phi^\dagger\gamma_4\phi$  项 ( $f$  是耦合常数),使  $\sigma$  场可以直接和夸克耦合. 如果只考虑夸克囚禁的问题,不需要引进  $f$  耦合,只要强子外部真空是完全(或几乎完全)的抗色介质就够了. 引进  $f$  耦合是基于如下的考虑: 在强子内部夸克和规范场的耦合常数  $g$  是比较小的,但是在强子外部,  $\kappa_\infty \rightarrow 0$ , 因而  $g_\infty = g/\sqrt{\kappa_\infty} \rightarrow \infty$ . 这一方面起着阻止夸克跑出强子的作用,另一方面也带来不能按耦合常数的幂做微扰论展开的技术性困难. 在(21.3)式中我们引进  $f$  耦合,并要求

$$f\sigma_{\text{真空}} \gg \text{强子质量}, \quad (21.7)$$

就可以用另一种方式说明夸克囚禁的效应,但同时又绕过了上述的技术性困难. 实际上,根据(21.3)式,夸克的唯象质量为

$$m + f\sigma = \begin{cases} m, & \text{在强子内部,} \\ m + f\sigma_{\text{真空}}, & \text{在强子外部.} \end{cases} \quad (21.8)$$

在条件(21.7)下,夸克不会跑到强子外面去,这使得我们可以充分利用强子内部耦合常数  $g$  比较小的特点. 我们可以用  $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$  展开强子的物理可观测量,例如强子的质量可以展开成

$$M = M_0 + \alpha M_1 + \alpha^2 M_2 + \dots \quad (21.9)$$

注意,在(21.3)式的  $\mathcal{L}$  中有两个耦合常数,其中  $f$  实质上来源于  $g$ ,但是在唯象的研究中,它们起的作用不同. 这和原子间的作用力有类似的地方,原子间的排斥力和吸引力都来源于电磁相互作用. 由于排斥力很强,我们可以唯象地引进一个刚球来表示排斥力. 于是原子限制在刚球之外的区域内运动;而对吸引力则可做微扰论处理.

## § 21.2 零阶近似

在零阶近似的计算中,我们忽略了交换规范场量子的效应.

于是强子可以用只包含  $\sigma$  场和  $\phi$  场的简单的孤粒子模型来描写。拉氏密度 (21.3) 式可以简化成

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\phi^\dagger \gamma_4 \left( \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + f\sigma + m \right) \phi \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} \right)^2 - U(\sigma).\end{aligned}\quad (21.10)$$

相应的哈氏密度为

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & \phi^\dagger \left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta(m + f\sigma) \right] \phi \\ & + \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \sigma)^2 + U(\sigma),\end{aligned}\quad (21.11)$$

其中  $\pi$  是与  $\sigma$  共轭的动量。如前所述, 由于  $\sigma$  是一种描写 QCD 的长程集体效应的唯象场, 其高频部分实际上是不存在的。因此, 我们可以忽略所有  $\sigma$  圈图, 而保留  $\sigma$  树图。这相当于准经典近似。在以下的讨论中, 我们把  $\sigma$  看成是一种经典场, 但是对  $\phi$  进行量子化。

假定  $\varphi_i^{(\pm)}$  是满足

$$\left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta(m + f\sigma) \right] \varphi_i^{(\pm)} = \pm \epsilon_i \varphi_i^{(\pm)} \quad (21.12)$$

的解,  $\varphi_i^{(\pm)}$  右上角的正负号分别与 (21.12) 式右边的正负号对应。这里已取  $\epsilon_i > 0$ , 并按以下顺序排列:

$$0 < \epsilon_0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \dots.$$

对于方程 (21.12) 的每一个解  $\varphi_i^{(+)}$ , 必有另一个解  $\varphi_i^{(-)}$  与之对应, 它们的本征值大小相等, 符号相反。这与  $\sigma$  场的  $C$  宇称为正密切相关。证明如下: 假定  $\varphi_i^{(+)}$  是方程 (21.12) 的一个解, 即

$$\left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta(m + f\sigma) \right] \varphi_i^{(+)} = \epsilon_i \varphi_i^{(+)}. \quad (21.13)$$

对上式取复共轭, 然后用  $\gamma_2$  乘式子两边, 利用  $\gamma_2 \beta \gamma_2 = -\beta$ ,  $\gamma_2 \boldsymbol{\alpha}^* \gamma_2 = \boldsymbol{\alpha}$  和  $\sigma^* = \sigma$ , 就可以得到

$$\left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta(m + f\sigma) \right] \gamma_2 \varphi_i^{(+)*} = -\epsilon_i \gamma_2 \varphi_i^{(+)*}. \quad (21.14)$$



所以每一个解  $\varphi_i^{(+)}$  确实对应于另一个解:

$$\varphi_i^{(-)} = \gamma_2 \varphi_i^{(+)*}. \quad (21.15)$$

它们的本征值大小相等,符号相反.

$\{\varphi_i^{(\pm)}\}$  是一个完备正交归一的  $C$  数函数系,我们可以利用它展开量子化的夸克场  $\psi$ :

$$\psi = \psi_c = \sum_i [a_i^c(q) \varphi_i^{(+)} + b_i^c(q)^\dagger \varphi_i^{(-)}], \quad (21.16)$$

其中  $c$  是颜色指标,  $q$  是味道指标,  $a_i^c(q)$  和  $b_i^c(q)^\dagger$  分别是夸克的湮灭算符和反夸克的产生算符,它们满足标准的反对易关系. 利用  $a_i^c(q)^\dagger$  和  $b_i^c(q)^\dagger$  可以构造出强子的态矢量,它们都是颜色单态. 例如,

$$\begin{aligned} |\Delta^{++}\rangle &= a_0^1(u)^\dagger a_0^2(u)^\dagger a_0^3(u)^\dagger |0\rangle, \\ |\rho^+\rangle &\propto a_0(u)^\dagger b_0(d)^\dagger |0\rangle, \end{aligned} \quad (21.17)$$

$a_0^{c\dagger}$  和  $b_0^{c\dagger}$  的下标 0 表示它们分别与  $\varphi_0^{(\pm)}$  对应,  $\varphi_0^{(\pm)}$  是  $l_I = S_{\frac{1}{2}}$ ,  $J_z = \pm \frac{1}{2}$  的解. 利用  $\varphi_i^{(\pm)}$  的正交归一性,我们有

$$\begin{aligned} \int \psi^\dagger \left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta(m + f\sigma) \right] \psi d^3r \\ = a_0^c(q)^\dagger a_0^c(q) \epsilon_0 - b_0^c(q) b_0^c(q)^\dagger \epsilon_0 + \dots \end{aligned} \quad (21.18)$$

因此

$$\begin{aligned} \int \langle | : \mathcal{H} : | \rangle d^3r &= N \epsilon(\sigma) \\ &+ \int \left[ \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (\nabla \sigma)^2 + U(\sigma) \right] d^3r, \end{aligned} \quad (21.19)$$

其中  $| \rangle$  是最低质量态的强子态矢量;  $\epsilon(\sigma) = \epsilon_0(\sigma)$ ;  $N$  是强子中夸克和反夸克的总数,对于介子,  $N = 2$ , 对于重子,  $N = 3$ . 在最低质量态中,显然应有  $\pi = 0$ , 即  $\sigma$  场是静止的. 再由

$$\frac{\delta}{\delta \sigma} \int \langle | : \mathcal{H} : | \rangle d^3r = 0, \quad (21.20)$$

得到

$$-\nabla^2\sigma + \frac{dU(\sigma)}{d\sigma} = -N \frac{\delta\epsilon(\sigma)}{\delta\sigma}. \quad (21.21)$$

另一方面,

$$\int \varphi^\dagger \left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta(m + f\sigma) \right] \varphi d^3r = \epsilon(\sigma),$$

其中  $\varphi = \varphi_0^{(+)}$ . 将上式对  $\sigma$  变分, 即得

$$f\varphi^\dagger\beta\varphi = -\frac{\delta\epsilon(\sigma)}{\delta\sigma}. \quad (21.22)$$

把 (21.22) 式代入 (21.21) 式, 我们有

$$-\nabla^2\sigma + \frac{dU}{d\sigma} = -fN\varphi^\dagger\beta\varphi. \quad (21.23)$$

此外由 (21.13) 式, 我们还有

$$\left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta(m + f\sigma) \right] \varphi = \epsilon\varphi. \quad (21.24)$$

(21.23) 和 (21.24) 式是确定  $\sigma$  和  $\phi$  的一组联立方程. 这组方程可以进一步简化.

取势能

$$U(\sigma) = p + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{\lambda}{3!} \sigma^3 + \frac{\lambda'}{4!} \sigma^4 + \dots \quad (21.25)$$

(见图 21.1). 令  $R =$  强子半径,  $\frac{1}{R} \sim m_N$  (核子质量). 我们假定  $\rho R^3 \sim m_N$ , 并认为  $U(\sigma)$  曲线的曲率很大,

$$m_\sigma \gg m_N,$$

同时所有非线性系数  $\lambda, \lambda', \dots$  (在以  $R$  为量纲单位时) 都很大. 在这种情形下, 图 21.1 中曲线变化很陡, 在强子内部  $\sigma$  场只能在  $\sigma = 0$  附近小的范围内变动, 否则系统的能量不是最低的. 因此,

$U(\sigma) \cong \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2$ , 又  $\nabla^2\sigma \sim \frac{\sigma}{R^2}$ , 所以

$$\frac{dU(\sigma)}{d\sigma} \cong m_\sigma^2 \sigma \gg |-\nabla^2\sigma|. \quad (21.26)$$

于是由 (21.23) 式, 我们有

$$\sigma = -\frac{f}{m_\sigma^2} N \varphi^\dagger \beta \varphi, \quad (21.27)$$

其中  $m_\sigma^2$  和  $f$  都很大, 但是  $\frac{f}{m_\sigma^2} \sim O(1)$ . 把 (21.27) 式代入 (21.24) 式, 就得到

$$\left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m - N \frac{f}{m_\sigma} (\varphi^\dagger \beta \varphi) \beta \right] \varphi = e \varphi. \quad (21.28)$$

(21.27) 式说明唯象场  $\sigma$  是由夸克产生的, 夸克是  $\sigma$  场的源. 反过来,  $\sigma$  场又把夸克束缚在强子内. 这与固体物理中的极化子很相似. 在离子晶体内, 电子与等离子波有很强的相互作用, 等离子波是一种电场, 它是由电子极化周围介质产生的, 反过来它又把电子束缚在这个场内. 当电子运动时带着周围的等离子波一起运动.

强子的边界由  $\sigma$  场的源为零定义, 即由

$$\varphi^\dagger \beta \varphi = 0 \quad (21.29)$$

决定. 在强子边界上 ( $r = R$ ), 由 (21.23) 和 (21.29) 式, 我们有  $\nabla^2 \sigma - \frac{dU}{d\sigma} = 0$ . 对  $U$  的变化说,  $R$  是很大的距离, 强子边界可以

看成是平面, 所以  $\nabla^2 \sigma \cong \frac{d^2 \sigma}{dr^2}$ , 从而

$$\frac{d^2 \sigma}{dr^2} - \frac{dU}{d\sigma} = 0, \quad (21.30)$$

积分后得

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\sigma}{dr} \right)^2 - U(\sigma) = 0, \quad (21.31)$$

此式有一维拓扑性孤粒子解. 由于特征能量 ( $m_\sigma$ ) 很大, 上式说明在孤粒子的边界层内  $\sigma$  的变化很陡, 所以边界的厚度  $\delta \ll R$  (见图 21.3).

$$\text{强子的表面能} = \int_{r>R} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \sigma)^2 + U(\sigma) \right] d^3 r = 4\pi R^2 s,$$

其中

$$s = 2 \int_R^\infty U(\sigma) dr \cong 2 \int_R^{R+\delta} U(\sigma) dr, \quad (21.32)$$

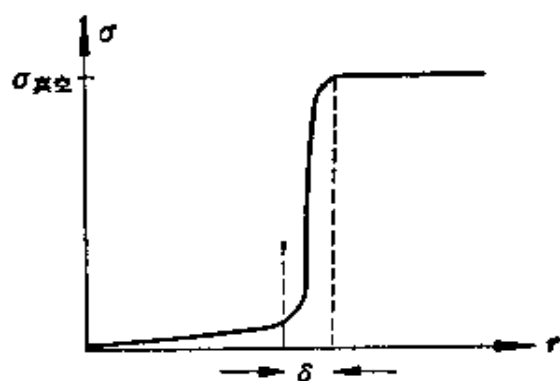


图 21.3

上式中因子 2 来源于  $\frac{1}{2} \left( \frac{d\sigma}{dr} \right)^2 = U(\sigma)$ . 在强子内部, 我们令

$$\left. \begin{aligned} \rho &= er, \\ \varphi &= \sqrt{\frac{6}{N}} \frac{m_\sigma}{f} \hat{\phi}, \end{aligned} \right\} \quad (21.33)$$

并假定夸克的质量  $m = 0$ , 就可以把 (21.28) 式化成

$$\left[ \frac{1}{i} \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla_\rho - (\hat{\phi}^\dagger \beta \hat{\phi}) \beta \right] \hat{\phi} = \hat{\phi}. \quad (21.34)$$

对于  $S_{\frac{1}{2}}$  轨道的夸克  $(J_z = \pm \frac{1}{2})$ , 令

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} u \\ i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\rho} v \end{pmatrix} \zeta, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (21.35)$$

其中  $u = u(\rho)$  和  $v = v(\rho)$  是两个待定的函数;  $\hat{\rho} = \boldsymbol{\rho}/|\boldsymbol{\rho}|$  是  $\boldsymbol{\rho}$  方向的单位矢量. 由于

$$\frac{1}{i} \rho_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_\rho \hat{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{2v}{\rho} + \frac{dv}{d\rho} \\ -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\rho} \frac{du}{d\rho} \end{pmatrix} \zeta, \quad (21.36)$$

于是由 (21.34) 式可以得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{2v}{\rho} + \frac{dv}{d\rho} &= (1 + u^2 - v^2)u, \\ \frac{du}{d\rho} &= (-1 + u^2 - v^2)v. \end{aligned} \right\} \quad (21.37)$$

这是一阶的非线性微分方程组，可以用计算机求出它的数值解。在(21.37)式中不明显地包含任何参数，但是它的解实际上是一个单参数的族。当  $\rho \rightarrow 0$  时，我们有  $v \rightarrow 0$  和  $u \rightarrow u(0)$ 。对于 0 到临界值  $u_c = 1.7419$  之间的任何  $u(0)$ ，(21.37) 式都有一个解。从  $\rho = 0$  到  $\rho = \rho_0$  直接积分，就可得到这个解。在  $\rho = \rho_0$  时，我们有  $u(\rho_0) = v(\rho_0)$ ，因此满足边界条件 (21.29)。强子的半径由下式确定：

$$R = \frac{\rho_0}{\sigma}. \quad (21.38)$$

可以取  $u(0)$ ，亦可以取

$$n = \int_{\rho \leq \rho_0} \varphi^\dagger \hat{\varphi} d^3\rho = \int_{\rho \leq \rho_0} (u^2 + v^2) d^3\rho \quad (21.39)$$

作为(21.37)式的解的参数。当  $u(0) \rightarrow 0$  时， $n \rightarrow 0$ ；当  $u(0) \rightarrow u_c = 1.7419$  时， $n \rightarrow \infty$ 。图 21.4 给出这两种极端情况的解。

当  $n \rightarrow 0$  时，可以忽略  $u$  和  $v$  的非线性项，求出解析形式的解。这时 (21.37) 式变成

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\rho} + \frac{2v}{\rho} &= u, \\ -\frac{du}{d\rho} &= v. \end{aligned}$$

这一组方程的解为

$$u \propto j_0(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho},$$

$$v \propto j_1(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho}.$$

当  $\rho = \rho_0$  时， $u(\rho_0) = v(\rho_0)$  或  $j_0(\rho_0) = j_1(\rho_0)$ 。因此  $\rho_0 = 2.0428$ ，同时

$$\epsilon = \frac{2.0428}{R}.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 可以求出  $\rho_0 = 1$ . 因此

$$\epsilon = \frac{1}{R}.$$

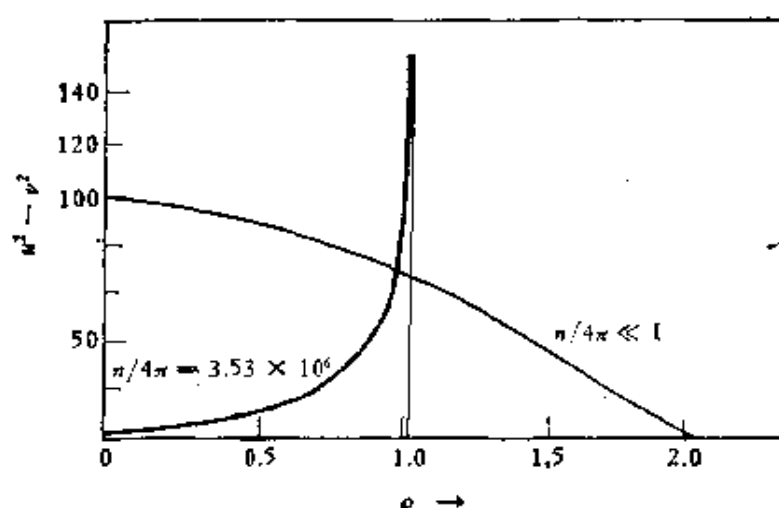


图 21.4

孤粒子解很像一个介质(即真空)中的气泡(即强子). 强子的质量由三个参数  $p$ ,  $s$  和  $n$  决定. 其中  $p$  由(21.25)式给出, 它代表介质对气泡的压强;  $s$  是表面张力, 由(21.32)式给出, 它是由于在穿过孤粒子界面时  $\sigma$  由 0 变到  $\sigma_{\text{真空}}$  引起的;  $n$  决定泡内气体的压强, 它是由夸克的动能和  $\sigma$  的激发能引起的. 零阶近似的强子能量可以写成

$$M = M_0 = \frac{N\rho_0}{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 p + 4\pi R^2 s. \quad (21.40)$$

在表 21.1 中我们给出了  $p$ ,  $s$  和  $n$  中有两个为零的情况下几种可观测量的理论结果. 第一列 ( $n \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$ ) 相当于 MIT 袋模型; 最后一列 ( $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ ) 相当于 SLAC 袋模型. 从表 21.1 我们知道, 为了把我们的理论应用于实际情形应当取  $n$  为  $O(1)$  或更小些. 在任何情况下都不应取  $n \rightarrow \infty$ , 否则  $g_A/g_V$  等于  $5/9$ , 并且电荷密度分布在孤粒子的表面上, 这两种情形都和物理核子的性质不符合.

表 21.1

物理可 观测量	实验值	理 论 值			
		$n \rightarrow 0$		$n \rightarrow \infty$	
		$s \rightarrow 0$	$p \rightarrow 0$	$s \rightarrow 0$	$p \rightarrow 0$
质子的均方根 电荷半径 $r_p$	$\frac{3.86}{m_N}$	$\frac{4.25}{m_N}$	$\frac{4.78}{m_N}$	$\frac{2.86}{m_N}$	$\frac{3.21}{m_N}$
质子磁矩 $\mu_p$	$\frac{2.79}{2m_N}$	$\frac{2.36}{2m_N}$	$\frac{2.66}{2m_N}$	$\frac{1.90}{2m_N}$	$\frac{2.14}{2m_N}$
中子磁矩 $\mu_n$	$-0.685\mu_p$	$-\frac{2}{3}\mu_p$	$-\frac{2}{3}\mu_p$	$-\frac{2}{3}\mu_p$	$-\frac{2}{3}\mu_p$
核子的 $g_A/g_V$	1.25	1.09	1.09	5/9	5/9
		MIT			SLAC

在本节最后这一部分,我们导出强子质量谱的  $SU_6$  对称性。低质量强子态中有轻夸克  $u, d, s$  及其反夸克,它们组成颜色单态。为方便起见,我们取三种轻夸克的质量都为零。此外,在零阶近似下,我们忽略和自旋有关的相互作用,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{(+)} &= \varphi_{0,J_z=\frac{1}{2}}^{(+)}, & \varphi_1^{(+)} &= \varphi_{0,J_z=-\frac{1}{2}}^{(+)}, \\ \varphi_1^{(-)} &= \gamma_2 \varphi_1^{(+)*}, & \varphi_1^{(-)} &= \gamma_2 \varphi_1^{(+)*}, \end{aligned} \right\} \quad (21.41)$$

于是可以把 (21.16) 式改写成

$$\begin{aligned} \psi_q^e &= a_1^e(q) \varphi_1^{(+)} + a_1^e(q) \varphi_1^{(+)} + \dots \\ &+ b_1^e(q) \varphi_1^{(-)} + b_1^e(q) \varphi_1^{(-)} + \dots \end{aligned}$$

注意,强子内夸克的运动是相对论性的,  $J_z = \pm \frac{1}{2}$  或记号  $\uparrow, \downarrow$  表示夸克的总角动量的分量,并非自旋的分量。令  $\alpha = (q, \zeta)$ ,  $\zeta = \uparrow$  或  $\downarrow$ ,  $\alpha$  可取 6 种值  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ 。此外,令  $a_\alpha^e = a_\zeta^e(q)$ ,  $b_\alpha^e = b_\zeta^e(q)$ , 则低质量介子的态矢量可以写成

$$|\text{介子}\rangle \propto a_\alpha^{e\dagger} b_\beta^{e\dagger} |0\rangle. \quad (21.42)$$

低质量介子是 36 重简并的。它包含赝标 9 重态:  $\pi^{0,\pm}, K^{\pm,0,\bar{0}}, \eta^0, \eta'^0$  和矢量 9 重态:  $\rho^{\pm,0}, K^{*\pm,0,\bar{0}}, \varphi^0, \omega^0$ 。每种矢量介子自旋有三

种取向,因此低质量介子的简并度为

$$36 = 1 \times 9 + 3 \times 9.$$

这 36 重态填充  $SU_6$  的不可约表示 ③⑤ 和 ①. 用  $\xi^a$  表示夸克的波函数,用  $\xi_a$  表示反夸克的波函数,则 ③⑤ 由不可约张量

$$T^a_b = \xi^a \xi_b - \frac{1}{6} \delta^a_b \xi^r \xi_r \quad (21.43)$$

构成; ① 由  $\xi^a \xi_a$  构成,

低质量重子态的态矢量可以写成

$$|\text{重子}\rangle \propto \epsilon_{cc'c''} S_{a\beta\gamma} a_a^{c\dagger} a_\beta^{c'\dagger} a_\gamma^{c''\dagger} |0\rangle, \quad (21.44)$$

其中  $S_{a\beta\gamma} = S_{\beta a\gamma} = S_{a\gamma\beta}$ . 由于

$S_{111}$  型有 6 种,

$S_{112}$  型有 30 种,

$S_{123}$  型有 20 种,

所以,重子低质量态是 56 重简并的,它们填充  $SU_6$  的不可约表示 ⑥,其中包含自旋为  $\frac{1}{2}$  的 8 重态:  $p, n, \Lambda, \Sigma^{\pm,0}, \Xi^{0,-}$ , 和自旋为  $\frac{3}{2}$  的 10 重态:  $\Delta^{++,+,\pm,0,-}, \Sigma^*(1385)^{\pm,0}, \Xi^*(1530)^{-,0}, \Omega^-$ . 因此简并度可以表示成

$$56 = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right) \times 8 + \left(2 \times \frac{3}{2} + 1\right) \times 10.$$

以上的讨论说明,我们的孤粒子模型有  $SU_6$  对称性. 为了消除  $SU_6$  简并,必须考虑交换规范场量子引起的自旋有关相互作用,这是一种 QCD 辐射修正.

### § 21.3 辐射修正

为了计算 QCD 辐射修正,我们需要知道强子内部规范场的传播子  $D_{\mu\nu}(x, x')$ . 令  $\mathcal{S}$  为强子的表面; 在  $\mathcal{S}$  内部色介常数  $\kappa = 1$ , 在  $\mathcal{S}$  外部  $\kappa = \kappa_\infty \rightarrow 0$ . 在库仑规范下,  $D_{\mu\nu}$  可以分解成



横和纵分量:

$$D_{\mu\nu} = \begin{cases} (D_{ij})_{\text{横}}, & \mu = i \approx 4, \quad \nu = j \approx 4, \\ (D_{44})_{\text{纵}}, & \mu = \nu = 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (21.45)$$

横和纵分量都可以用  $\kappa_\infty$  的幂级数表示:

$$(D_{44})_{\text{纵}} = O\left(\frac{1}{\kappa_\infty}\right) + O(1) + O(\kappa_\infty) + \cdots, \quad (21.46)$$

$$(D_{ij})_{\text{横}} = O(1) + O(\kappa_\infty) + \cdots.$$

[关于 QCD 的费曼规则, 参阅 *Phys. Rev.*, **D19**, 1802 (1979).]

例如, 如果  $\mathcal{S}$  是半径为  $R$  的球面, 则

$$\begin{aligned} [D_{44}(x, x')]_{\text{纵}} &= \delta(t - t') \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{1}{\kappa_\infty} - 1 \right) \frac{1}{R} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1}{l} \left( \frac{rr'}{R^2} \right)^l \frac{1}{R} P_l(\cos \theta) \right] + O(\kappa_\infty), \end{aligned} \quad (21.47)$$

其中  $x_\mu = (\mathbf{r}, it)$ ,  $x'_\mu = (\mathbf{r}', it')$  和  $\theta = L(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . 由 (21.47) 式可以看出, 当  $\kappa_\infty \rightarrow 0$  时,  $D_{44} \rightarrow \infty$ . 由于这一点, 任何两个有色态  $|a\rangle$  和  $|b\rangle$  之间的  $S$  矩阵元, 当  $\kappa_\infty \rightarrow 0$  时是发散的. 然而, 可以证明, 对于任何两个颜色单态, 当  $\kappa_\infty \rightarrow 0$  时,

$$\langle b | S | a \rangle = O(1). \quad (21.48)$$

这就自动地保证了强子内的夸克不会穿过  $\mathcal{S}$  跑到外面去. 此外, 在颜色单态之间, (21.47) 式可以用  $\delta(t - t') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  代替, 其中

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l+1}{l} \left( \frac{rr'}{R^2} \right)^l \frac{P_l(\cos \theta)}{R} \right] + O(\kappa_\infty). \quad (21.49)$$

同样可以求出  $(D_{ij})_{\text{横}}$  的显示式.

我们的规范场传播子  $D_{\mu\nu}$  依赖于  $\kappa_\infty$  和表面  $\mathcal{S}$  的形状. 对于颜色单态, 当  $\kappa_\infty \rightarrow 0$ , 并且四动量转移  $\rightarrow \infty$  时, 传播子  $D_{\mu\nu} \rightarrow -i \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2}$ , 即约化成文献中通常采用的形式.

下面我们研究强子的质量谱。在表 21.2 中，我们列出了部分

表 21.2

$\pi(140)$	$\eta(549)$	$\eta'(958)$
$\rho(770)$	$\omega(783)$	$\phi(1020)$
$N(940)$	$\Delta(1232)$	等等

低质量态强子的质量。在 § 21.2 中我们已经说明，在零阶近似下，低质量态的介子是 36 重简并的，低质量态的重子是 56 重简并的。辐射修正可以使自旋不同的态的能量分开来。这是由于交换规范场量子使夸克之间产生一种与自旋有关的相互作用。这种作用使  $\pi$  和  $\rho$  或  $N$  和  $\Delta$  之间简并消除。此外，由于  $s$  夸克的质量比  $u$  和  $d$  夸克的质量大约大 100 MeV，使包含  $s$  夸克的强子比不含  $s$  夸克的强子质量大，进一步使有确定自旋的不同的态的能量分开。

我们首先讨论辐射修正引起的能量分裂，并集中研究四个态： $\pi$ ， $\rho$ ， $N$  和  $\Delta$ 。在计算一级修正时，对于介子我们只考虑图 21.5(1)，对于重子只考虑图 21.5(2)。在低质量态强子中，夸克都

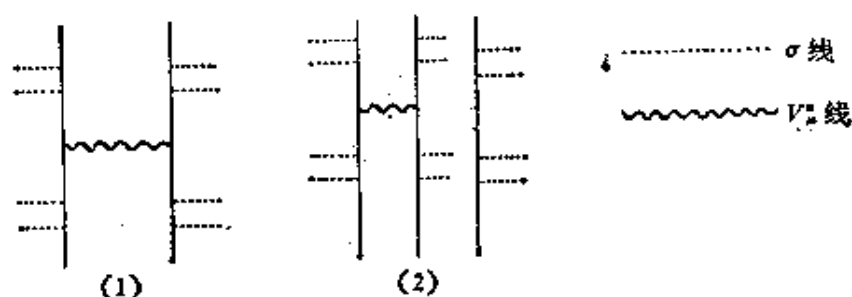


图 21.5

处于  $S_{\frac{1}{2}}$  态。假定夸克  $u$ ， $d$  的质量为零，并暂不考虑夸克  $s$ 。在包括图 21.5 贡献的情形下，介子和重子的质量可以写成

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 p + \frac{N}{R} [\rho_0 - a(I_{\text{电}} - \lambda I_{\text{磁}})]. \quad (21.50)$$

对于介子， $N = 2$ ，对于重子， $N = 3$ ， $\rho_0$  是零阶近似参数：

$$\rho_0 = \begin{cases} 2.0428, & \text{对 MIT 袋,} \\ 1, & \text{对 SLAC 袋.} \end{cases}$$

$I_0$  和  $I_{\text{H}}$  是大于零的无量纲常数, 它们可以由图 21.5 计算出来, 此外

$$\lambda = \langle \sigma_1 \cdot \sigma_2 \rangle = \begin{cases} -3, & \text{对 } \pi, \\ 1, & \text{对 } \rho \text{ 和 } \Delta, \\ -1, & \text{对 } N, \end{cases} \quad (21.51)$$

其中  $\sigma_i$  表示  $i$  夸克的自旋。由于相对论性, 这里以及后面所谓的自旋是指单个夸克的总角动量。以介子为例计算  $\lambda$ ,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2),$$

于是

$$\begin{aligned} J(J+1) &= \frac{1}{4} \sigma_1^2 + \frac{1}{4} \sigma_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \sigma_1 \cdot \sigma_2. \end{aligned}$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 2J(J+1) - 3 = \begin{cases} -3, & \text{当 } J=0, \\ 1, & \text{当 } J=1. \end{cases}$$

同样可以计算出重子的  $\lambda$ 。(21.50) 和 (21.51) 式说明自旋(单个夸克的总角动量)平行时夸克之间的自旋有关相互作用是排斥的, 反平行时是吸引的。前一种情况比后一种情况的能量高。这样, 自旋有关相互作用就使不同自旋态的强子质量分开来。

假定  $I_0$  和  $I_{\text{H}}$  已计算出来, 并且已选定一种特定的袋模型, 因而  $\rho_0$  是已知的。利用 (21.50) 和 (21.51) 式, 我们可以把四种强子  $\pi$ ,  $\rho$ ,  $N$  和  $\Delta$  的质量用两个参数  $\alpha$  和  $p$  表示出来。消去  $\alpha$ ,  $p$ , 可以得到两个质量公式, 即 (21.52) 和 (21.53) 式。令

$$\xi = \rho_0 - \alpha(I_0 - \lambda I_{\text{H}}).$$

由 (21.51) 式, 我们有

$$\xi_{\Delta} = \xi_{\rho}, \quad \xi_{\rho} - \xi_{\pi} = 2(\xi_{\Delta} - \xi_N).$$

把 (21.50) 式改写成

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 p + \frac{N\xi}{R}.$$

由  $\frac{dM}{dR} = 0$ , 得  $R^4 \propto N\xi$ , 故  $M \propto (N\xi)^{\frac{1}{4}}$ . 于是由  $\xi_{\Delta} = \xi_{\rho}$  推导出

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{M_{\Delta}}{M_{\rho}} = 1. \quad (21.52)$$

又  $M^{4/3} \propto N\xi$ , 于是由  $\xi_{\rho} - \xi_{\pi} = 2(\xi_{\Delta} - \xi_N)$ , 又推导出

$$\frac{3}{4} \left( \frac{M_{\rho}^{4/3} - M_{\pi}^{4/3}}{M_{\Delta}^{4/3} - M_N^{4/3}} \right) = 1. \quad (21.53)$$

实验结果是

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{3/4} \left(\frac{M_{\Delta}}{M_{\rho}}\right)_{\text{实验}} &= 1.180, \\ \frac{3}{4} \left( \frac{M_{\rho}^{4/3} - M_{\pi}^{4/3}}{M_{\Delta}^{4/3} - M_N^{4/3}} \right) &= 1.187. \end{aligned} \quad (21.54)$$

注意, 由于(21.50)式的特殊形式, 质量公式(21.52)和(21.53)与  $\xi_0$ ,  $I_{\pi}$  和  $I_{\Delta}$  的值无关.

以上我们讨论了交换规范场量子怎样导致不同自旋态的质量分开. 现在我们研究自旋相同的态的简并是怎样消除的. 先讨论  $1^-$  介子简并消除的问题.  $1^-$  介子的波函数如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho(770) &= u\bar{d}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u}), \quad d\bar{u} \\ \omega(783) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} + u\bar{u}), \\ \varphi(1020) &= s\bar{s}, \\ K^*(892) &= u\bar{s}, d\bar{s}, s\bar{u}, s\bar{d}. \end{aligned} \right\} \quad (21.55)$$

假定

$$m_u = m_d, \quad m_s - m_u = \Delta,$$

其中  $m_u$ ,  $m_d$ ,  $m_s$  分别是  $u$ ,  $d$ ,  $s$  夸克的质量. 如果我们认为(21.55)中列举的介子的质量差是由  $u$ ,  $d$  夸克与  $s$  夸克的质量差造成的, 则

$$m_{K^*} - m_{\rho} = \Delta,$$

$$m_\pi - m_\rho = 2\Delta,$$

$$m_\omega - m_\rho = 0.$$

实际上

$$m_{\pi^*} - m_\rho \cong 122 \text{ MeV},$$

$$m_\varphi - m_\rho \cong 250 \text{ MeV},$$

$$m_\omega - m_\rho \cong 13 \text{ MeV}.$$

所以用  $u$ ,  $d$  夸克与  $s$  夸克的质量差说明  $1^-$  介子的质量, 可以准确到  $\sim 10\%$  的程度.  $\frac{3}{2}^+$  重子和  $\frac{1}{2}^+$  重子的简并消除, 也不难说明, 然而,  $0^-$  介子的问题比较复杂. 关于  $0^-$  介子, 我们讨论两个问题, 即为什么  $m_\pi \cong 0$  和  $\eta - \eta'$  反常.

先讨论第一个问题. 从(21.50)式可以看出,  $\alpha$  有一个临界值  $\alpha_c$ , 当  $\alpha < \alpha_c$  时,  $M(R)$  总是大于零的, 当  $\alpha > \alpha_c$  时,  $M(R)$  在  $R$  小的时候变成负数, 而且当  $R \rightarrow 0$  时,  $M(R) \rightarrow -\infty$ , 如图 21.6 所示.  $\pi$  是强子的最低能态 (在  $\pi$  介子态中色电和色磁作用都是吸引的, 而且  $\lambda = -3$ ). 唯象地说, 适当取一个接近  $\alpha_c$  的  $\alpha$  值, 就不难得到一个接近于零的  $m_\pi$ .

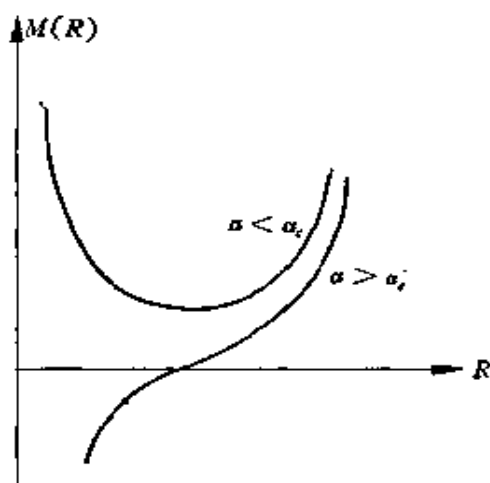


图 21.6

为什么实际上的  $\alpha$  值接近于  $\alpha_c$  呢? 我们做如下的推测. 注意在以上的讨论中, 我们认为  $\alpha$  与  $R$  无关. 然而, 事实上  $\alpha$  是依赖

于  $R$  的. 根据 § 20.1 中的定理, 我们知道,  $R$  愈大,  $\alpha$  也愈大, 反之愈小. 取  $\alpha$  略大于  $\alpha_c$ , 把对应于  $M = 0$  处的  $R$  变动一下, 考虑到  $\alpha$  对  $R$  的依赖关系, 就可以看出  $M = 0$  很可能是一个局部极小值. 事实上,  $m_\pi$  很小, 但不真的等于零, 这一点可以用  $u$ ,  $d$  夸克的质量不为零说明.

由于  $I \sim O(1)$ ,  $\rho_0 \sim O(1)$ , 我们有  $\alpha \sim O(1)$ , 因此, 人们可能认为, 以  $\alpha$  作为展开参数是很糟的. 然而, 幸运的是, 在实际

计算中展开参数不是  $\alpha$  而是  $\frac{\alpha}{\pi^2}$  (类似于在 QED 中计算电子的反常磁矩时展开参数实际上是  $\frac{1}{2\pi}(\frac{e^2}{4\pi})$ )。这是由于求辐射修正时需要计算圈图的贡献。圈图的贡献可以写成  $\frac{g^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \dots$ , 对立体角积分得  $4\pi$ , 因此  $g^2$  总是和  $\frac{4\pi}{(2\pi)^4}$  乘在一起的, 这个乘积恰好是  $\frac{\alpha}{\pi^2}$ 。

以下我们讨论  $\eta(548)$  和  $\eta'(958)$  的质量问题。从 (21.55) 式我们知道, 在三个中性矢量介子  $\rho^0, \omega, \varphi$  中,  $\rho^0$  和  $\omega$  是近似简并的。在赝标介子中,  $\pi^0$  是和  $\rho^0$  地位相当的 ( $\pi^0$  和  $\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}d - u\bar{u})$ )。但是为什么  $\eta$  和  $\eta'$  中没有有一个和  $\pi^0$  近似简并呢? 为什么  $\eta'$  的质量这样高呢? 这就是所谓  $\eta$ - $\eta'$  反常问题。对于这个问题, 我们给出一个可能的解释。

考虑  $O(\alpha^2)$  的辐射修正图 21.7, 这种图对于矢量介子 ( $J=1$ ) 没有贡献, 但是对处于  $J=0$  同时颜色和味道都是单态的  $\bar{q}q$  有贡献。 ( $J=1$  的  $\bar{q}q$  不能湮灭成两个规范场量子, 其道理与  $J=1$  的  $e^+e^-$  不能湮灭成一对光子类似;  $\bar{q}q$  处于颜色和味道单态是由于介子是无色的, 而规范场是无味的)。可以认为,  $\eta$ - $\eta'$  反常是这种图造成的。但是这种图属于  $O(\alpha^2)$ , 怎样会造成如此大的质量差呢?

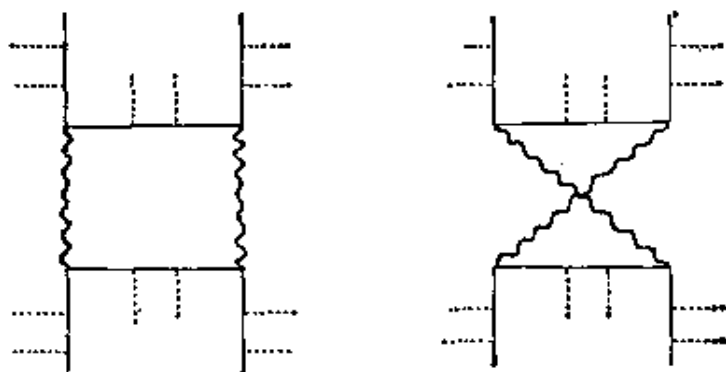


图 21.7

考虑一个颜色和味道的单态:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{9}} |\bar{u}^c u^c + \bar{d}^c d^c + \bar{s}^c s^c\rangle.$$

这是 9 个态的相干混合态. 另取

$$|1\rangle = |\bar{u}^B u^B - \bar{u}^R u^R\rangle,$$

计算  $|1\rangle$  变成两个规范场量子 (图 21.7 的中间态) 的振幅. 显然,  $\langle 2V|S\rangle = 0$ , 因为  $|1\rangle$  不是色

和味的单态. 类似于  $|1\rangle$  的态有 8 种, 它们都与  $|1\rangle$  正交. 因此, 图

21.8 中的矩阵元  $M$  与色及味无关. 由此可见图 21.7 中过程的

矩阵元  $\sim \left(\frac{1}{\sqrt{9}} \cdot 9 \cdot M\right)^2 = 9M^2$ .

又  $9 \cdot \frac{\alpha}{\pi} \sim O(1)$ , 因此, 图 21.7 的

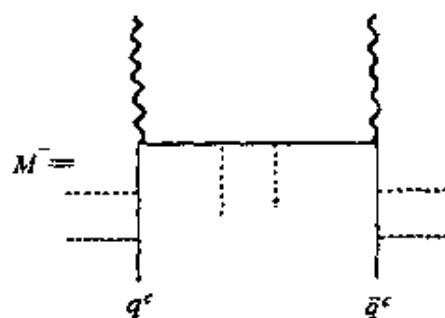


图 21.8

贡献与低一阶图的贡献是同数量级的. 这就使我们有可能用图 21.7 解释  $\eta-\eta'$  反常.

在以上两章中, 我们用强子外部真空是完全或几乎完全是抗色介质的观念, 建立了强子的孤粒子 (或袋) 模型, 解释了夸克囚禁问题. 在我们的模型中, 是强子外部真空的压力, 使夸克不能跑到外面去. 在最低阶近似下, 我们说明了强子质量谱的  $SU_6$  对称性, 并计算了质子的电荷半径, 质子的磁矩, 中子和质子的磁矩比以及  $g_A/g_V$  等. 我们用规范场量子引起的辐射修正和夸克的质量差说明了  $SU_6$  简并的消除. 此外, 我们还给出了  $m_\pi \cong 0$  和  $\eta-\eta'$  反常的可能解释. 所有这些在理论上是自洽的, 并与实验基本符合. 当然, 我们的理论还需要更充分更精密的证明和进一步的发展.

夸克囚禁问题是非常重要的, 其重要性可能与 19 世纪末所讨论的原子是否存在的问题相当. 如果我们将来能把这个问题解决得像原子问题那样完美, 很可能引起像从经典力学到量子力学过渡那样的发展.

## 第二十二章 弱相互作用唯象分析

在本章中,我们将基本上采用费米当年所用的方法,对弱作用进行唯象分析. 弱相互作用的拉格朗日密度可写为

$$\mathcal{L}_{\text{弱}} = \mathcal{L}_{\text{纯轻}} + \mathcal{L}_{\text{半轻}} + \mathcal{L}_{\text{无轻}}, \quad (22.1)$$

这里,  $\mathcal{L}_{\text{纯轻}}$  描写只有轻子参加的弱作用,  $\mathcal{L}_{\text{半轻}}$  及  $\mathcal{L}_{\text{无轻}}$  分别描写轻子与夸克之间以及纯粹夸克之间的弱作用. 按理, 后两项写成  $\mathcal{L}_{\text{轻夸}}$  及  $\mathcal{L}_{\text{纯夸}}$  更合适, 不过, 我们还是按照惯例写成  $\mathcal{L}_{\text{半轻}}$  及  $\mathcal{L}_{\text{无轻}}$ .

下面我们对 (22.1) 式中的三项逐一进行讨论.

### § 22.1 纯轻子弱相互作用

纯轻子弱相互作用的拉格朗日密度可以写为

$$\mathcal{L}_{\text{纯轻}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\lambda \bar{j}_\lambda + \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\lambda^0 j_\lambda^0, \quad (22.2)$$

其中

$$j_\lambda \equiv i \sum_{l=e, \mu, \tau} \phi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_l}, \quad (22.3)$$

$$j_\lambda^0 \equiv i \sum_{l=e, \mu, \tau} [C_\nu \phi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_l} + \phi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (C_\nu + C_A \gamma_5) \psi_l], \quad (22.4)$$

$$\bar{j}_\lambda \equiv \begin{cases} j_\lambda^\dagger, & \text{当 } \lambda = 1, 2, 3, \\ -j_4^\dagger, & \text{当 } \lambda = 4. \end{cases} \quad (22.5)$$

$G_F$  是费米弱作用常数, 其数值为  $G_F = 10^{-5}/m_p^2$ .  $C_\nu$ ,  $C_V$  及  $C_A$  的大小是  $O(1)$  数量级. 注意在 (22.2) 式中, 我们采用的是由 (22.5) 式定义的  $\bar{j}_\lambda$ , 而不是  $j_\lambda^\dagger$ , 这是因为在我们所用的记号中,  $j_\lambda \equiv i j_{\lambda 0}$ . 带有虚数  $i$ , 在洛伦兹变换下, 是  $\bar{j}_\lambda$  而不是  $j_\lambda^\dagger$  的变换性质



与  $j_A$  一样. 应用  $\bar{j}_A$  保证了  $\mathcal{L}_{\text{电弱}}$  的洛伦兹不变性.

由(22.3)式可知,  $j_A$  是消灭中微子  $\nu_l$  (或产生  $\bar{\nu}_l$ )、产生带电粒子  $l^-$  (或消灭  $l^+$ ) 的算符. 显然, 对于任何不为零的矩阵元  $\langle \text{终} | j_A | \text{始} \rangle$ , 必有  $\Delta Q = Q_{\text{终}} - Q_{\text{始}} = -1$ , 所以,  $j_A$  被称为轻子带电弱流. 同理, 由于  $j_A^0$  的  $\Delta Q = 0$ , 所以被称为轻子中性弱流.

在所有的弱作用中, (22.2) 式中的第一项, 即轻子带电弱流耦合项, 是人们了解得最清楚的. 其主要的实验依据是  $\mu$  衰变:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e,$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e.$$

这些过程的测量已经达到相当高的精确度, 测得的  $\mu$  寿命, 终态电子能谱,  $\mu$  极化的影响等, 都与用(22.2)式第一项算出的结果一致 (参看习题 23).

(22.2) 式中第二项是中性弱流  $j_A^0$  的贡献.  $j_A^0$  与电磁流

$$(j_A)_\text{电} = \sum_{l=e,\mu,\tau} i\psi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_A \psi_l$$

十分相似, 不过,  $j_A^0$  中包括有电磁流中没有的中微子项, 此外, 它还有电磁流中没有的  $C_A \gamma_5$  项, 此项的存在使得宇称可以不守恒. 在  $\mathcal{L}_{\text{电弱}}$  中放进中性弱流耦合项究竟有什么实验根据呢?

我们知道, 通过  $\mathcal{L}_{\text{电弱}}$  中的带电流项, 到  $G_F$  的一阶, 可以发生下列反应:

$$\mu^- \rightleftharpoons e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$(\text{或 } \nu_\mu + e^- \rightleftharpoons \mu^- + \nu_e),$$

$$\nu_\mu + \mu^- \rightleftharpoons \nu_\mu + \mu^-,$$

$$\nu_e + e^- \rightleftharpoons \nu_e + e^-.$$

但是, 如果只有带电流项, 就不可能发生下列反应:

$$\nu_\mu + e^- \rightleftharpoons \nu_\mu + e^-,$$

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightleftharpoons \bar{\nu}_\mu + e^-.$$

可以产生这些反应的是中性弱流. 实验上, 在美国和欧洲联合核子研究中心 (CERN) 都已发现这些反应, 其截面与带电弱流事例数量级相同, 从而证明了轻子中性弱流的存在. 不过请注意, 对于

唯象分析而言, (22.4) 式并不是中性弱流最普遍的形式。比如, 原则上, 它也可以有标量项等等。这里考虑到下面将要讲的温伯格 (S. Weinberg) 理论与实验符合, 所以采用了 (22.4) 式这种受到温伯格理论影响的形式。目前, 这种较简单的形式在实验分析时也常用到。

## § 22.2 半轻子弱相互作用

轻子与夸克之间的弱作用拉氏密度可以写为

$$\mathcal{L}_{\text{半轻}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [(J_\lambda \bar{j}_\lambda + \text{h.c.}) + J_\lambda^0 j_\lambda^0], \quad (22.6)$$

其中  $\bar{j}_\lambda$  及  $j_\lambda^0$  就是 (22.3) 到 (22.5) 式中定义的轻子弱流;  $J_\lambda$  和  $J_\lambda^0$  是强子弱流 (夸克弱流), 关于它们, 我们留到后面讨论。注意 (22.6) 式与 (22.2) 式有共同的耦合常数  $G_F$ , 表示  $\mathcal{L}_{\text{半轻}}$  与  $\mathcal{L}_{\text{纯轻}}$  是同一数量级的相互作用。

(22.6) 式中的  $j_\lambda$  也是 (22.3) 式。其首要实验根据是  $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$  与  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  的衰变率比。理论上, 用 (22.6) 及 (22.3) 式可以算出

$$\begin{aligned} \frac{\text{衰变率 } (\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e)}{\text{衰变率 } (\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu)} &= \left( \frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left( \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 (0.965) \\ &= 1.23 \times 10^{-4}, \end{aligned} \quad (22.7)$$

衰变到  $e\nu$  的事例比衰变到  $\mu\nu$  的要少四个数量级。

上述结果与  $\bar{j}_\lambda = i \Sigma \phi_{\nu_l}^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \phi_l$  的构造为  $\gamma_4 \gamma_\lambda (1 + \gamma_5)$  型的密切相关。这里  $(1 + \gamma_5)$  原来紧挨着  $\phi_{\nu_l}^\dagger$ , 反映了中微子的左旋性质。由于  $(1 + \gamma_5)$  与  $\gamma_4 \gamma_\lambda$  可以对易, 所以它可以移到  $\phi_l$  前面, 如果  $m_l \approx 0$ , 产生的  $l^+$  必定是右旋的。于是在质心系中看来, 由  $\bar{j}_\lambda$  产生的这对  $l^+ \nu_l$  不可能形成角动量为零的态 (见图 22.1)。这意味着, 角动量守恒规则将禁戒  $\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l$  衰变。当然, 实际上,  $m_l \neq 0$ , 衰变还是可以进行的, 只是在衰变率表达式中出现

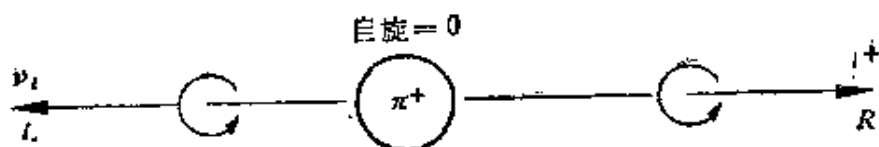


图 22.1

比例于  $m_l^2$  的因子. 这就是 (22.7) 式中  $\left(\frac{m_c^2}{m_\mu^2}\right)$  的来源. 如果  $j_\lambda$  中出现的不是  $\gamma_\lambda$ , 而是  $S$  或  $T$ , 则  $(1 + \gamma_5)$  左移到  $\psi_l^\dagger$  处时成为  $(1 - \gamma_5)$ ,  $\bar{j}_\lambda$  产生的  $l^+$  是左旋的, 上面所说的角动量禁戒就不存在, (22.7) 式中的  $\left(\frac{m_c^2}{m_\mu^2}\right)$  因子也就没有了,  $\pi \rightarrow e\nu$  的衰变率也就不会比  $\pi \rightarrow \mu\nu$  小很多.

(22.7) 式中还有两个因子, 一个是 (0.965), 它来自辐射修正, 另一个是  $\left(\left(\frac{m_\pi^2 - m_c^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2\right)$ , 它来自相空间因子. 实验的结果完全与 (22.7) 式符合, 表明 (22.6) 式中  $j_\lambda$  取 (22.3) 式是正确的.

在 (22.6) 式中, 除掉能产生反应

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + \dots,$$

$$\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \mu^+ + \dots$$

的带电弱流耦合项外, 还有中性弱流耦合项. 证明后一项存在的第一个实验证据来自下列反应:

$$\begin{cases} \nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + \dots, \\ \bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \dots. \end{cases}$$

这些反应由欧洲联合核子研究中心首先发现, 又为以后的实验继续证实. 目前, 实验测得的结果是

$$\frac{\sigma(\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + \dots)}{\sigma(\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + \dots)} = 0.293 \pm 0.03,$$

$$\frac{\sigma(\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \dots)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \mu^+ + \dots)} = 0.35 \pm 0.03.$$

这些实验证明了至少存在着中微子中性弱流. 另一个重要的实验是最近在斯坦福直线加速器中心 (SLAC) 确定了  $e^-p$  散射中存在着宇称不守恒现象. 早些时候, 曾有三个实验组测量原子中宇称

不守恒现象,得到的结果不一致,有的说有,有的说没有。现在通过这一实验,肯定了电子中性弱流的存在。

下面我们转向讨论  $J_A$ 。令

$$q^a = \begin{pmatrix} u^a \\ d^a \\ s^a \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned} J_A &= i(\cos \theta_c d^a + \sin \theta_c s^a)^\dagger \gamma_4 \gamma_A (1 + \gamma_5) u^a \\ &= i q^{a\dagger} \left[ \frac{1}{2} (\lambda^1 - i\lambda^2) \cos \theta_c + \frac{1}{2} (\lambda^4 - i\lambda^5) \sin \theta_c \right] \\ &\quad \times \gamma_4 \gamma_A (1 + \gamma_5) q^a, \end{aligned} \quad (22.8)$$

其中上标  $a$  是颜色指标,重复的  $a$  指标应理解为对三种颜色求和。 $\theta_c$  叫卡比玻角 (Cabibbo)。 $\lambda^i$  是盖尔曼矩阵。

注意,考虑到  $b$  和  $c$  夸克的弱作用形式还没有完全搞清楚,所以在这里只写了  $u, d, s$  三种夸克。显然,  $J_A$  是无色的。 $J_A$  中的

$$\frac{1}{2} (\lambda^1 - i\lambda^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 把 } u \text{ 夸克变为 } d \text{ 夸克, } \frac{1}{2} (\lambda^4 - i\lambda^5) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 把 } u \text{ 夸克变成 } s \text{ 夸克, 它们都是味 } SU_3 \text{ 的生成元, 所}$$

以  $J_A$  属于味  $SU_3$  的八维表示。如果我们假定强作用有味  $SU_3$  不变性,则对某一介子八重态,矩阵元  $\langle \text{真空} | J_A | \text{介子} \rangle$  只有一个未定常数,原因是真空属于味  $SU_3$  的一维表示,而  $\textcircled{8}(\text{介子}) \otimes \textcircled{8}(J_A) \rightarrow \textcircled{1}(\text{真空})$  只有一种独立的构造方式。于是,我们就可以比较同一八重态中不同的介子的弱作用过程。比如,对于  $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  及  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ , 有

$$\frac{\text{衰变率}(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)}{\text{衰变率}(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \text{tg}^2 \theta_c \frac{m_\pi}{m_K} \frac{p^2(K^+)}{p^2(\pi^+)}, \quad (22.9)$$

其中

$$\frac{p^2(K^+)}{p^2(\pi^+)} = \left( \frac{m_{K^+}^2 - m_\mu^2}{m_{K^+}} \right)^2 \left( \frac{m_{\pi^+}}{m_{\pi^+}^2 - m_\mu^2} \right)^2. \quad (22.10)$$

对于(22.9)式,我们作一些说明.从(22.6)式,我们知道, $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ 的矩阵元正比于

$$\langle 0 | J_\lambda | K^+ \rangle \langle \mu^+ \nu_\mu | j_\lambda | 0 \rangle, \quad (22.11)$$

而  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$  的矩阵元则正比于

$$\langle 0 | J_\lambda | \pi^+ \rangle \langle \mu^+ \nu_\mu | j_\lambda | 0 \rangle. \quad (22.12)$$

将  $J_\lambda$  的表达式(22.8)代入,对  $\pi^+$  有贡献的是第一项(即  $\Delta s = 0$  的项),对  $K^+$  有贡献的则是第二项(即  $\Delta s = -1$  的项).于是,分别有因子  $\cos \theta_c$  及  $\sin \theta_c$  出现于(22.12)及(22.11)式中,给出了(22.9)式中的  $\text{tg}^2 \theta_c$ .

(22.9)式中的  $\frac{m_\pi}{m_K}$  因子的来源,可以这样来看:当  $J_\lambda$  夹在介子态和真空态中间时,可以设想成类似于介子场算子  $\phi$ ,  $\phi$  展开为产生和湮灭算符时出现因子  $\frac{1}{\sqrt{2m}}$ ,使得(22.9)式中出现了  $\frac{m_\pi}{m_K}$ .

(显然,这个说法是很粗糙的.仔细的计算要用到部分轴矢流守恒假设,这里不讲了.)

(22.9)式中的最后一个因子来自相空间因子  $\frac{d^3 p}{\omega} \sim p^2$ . 在质心系中,质量为  $M$  的粒子衰变成动量为  $\mathbf{p}$  及  $(-\mathbf{p})$  的  $\mu$  和  $\nu_\mu$  时,  $\mathbf{p}$  的大小  $p$  可以由能量守恒定律

$$p + \sqrt{p^2 + m_\mu^2} = M$$

算出,结果为

$$p = \frac{M^2 - m_\mu^2}{2M}.$$

它给出了(22.10)式.

尽管我们的上述说明比较粗糙,但仔细计算的结果仍是(22.9)式.

实验测量这个比值给出

$$\sin \theta_c = 0.2655 \pm 0.0006,$$

$\sin^2 \theta_c$  只有 0.06 左右, 是很小的.  $\theta_c$  也可以由其它实验确定(参看习题 28), 结果相差不多, 差别在 10% 范围内.

为了进一步分析强子弱流的性质, 我们将 (22.8) 式写为

$$\begin{aligned}(J_\mu)_{\bar{q}} &= V_\mu + A_\mu \\ &= (J_\mu)_{\Delta S=0} + (J_\mu)_{\Delta S \neq 0},\end{aligned}\quad (22.13)$$

其中,  $V_\mu$  是强子弱流的矢量流部分,  $A_\mu$  是轴矢流部分,  $(J_\mu)_{\Delta S=0}$  及  $(J_\mu)_{\Delta S \neq 0}$  是  $\Delta S = 0$  及  $\Delta S \neq 0$  的部分. 它们的具体表达式是

$$V_\mu = i q^{a\dagger} \left[ \frac{1}{2} (\lambda^1 - i\lambda^2) \cos \theta_c + \frac{1}{2} (\lambda^4 - i\lambda^5) \sin \theta_c \right] \gamma_4 \gamma_\mu q^a, \quad (22.14)$$

$$A_\mu = i q^{a\dagger} \left[ \frac{1}{2} (\lambda^1 - i\lambda^2) \cos \theta_c + \frac{1}{2} (\lambda^4 - i\lambda^5) \sin \theta_c \right] \gamma_4 \gamma_\mu \gamma_5 q^a, \quad (22.15)$$

$$(J_\mu)_{\Delta S=0} = i q^{a\dagger} \left[ \frac{1}{2} (\lambda^1 - i\lambda^2) \cos \theta_c \gamma_4 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \right] q^a, \quad (22.16)$$

$$(J_\mu)_{\Delta S \neq 0} = i q^{a\dagger} \left[ \frac{1}{2} (\lambda^4 - i\lambda^5) \sin \theta_c \gamma_4 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \right] q^a. \quad (22.17)$$

作为比较, 我们也要用到强子的电磁流

$$(J_\mu)_e = i q^{a\dagger} \frac{1}{2} \left( \lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda^8 \right) \gamma_4 \gamma_\mu q^a, \quad (22.18)$$

其中

$$Q = \frac{1}{2} \left( \lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda^8 \right) = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

是电荷矩阵. 由于  $\lambda^3$  是同位旋矢量,  $\lambda^8$  是同位旋标量, 所以  $(J_\mu)_e$  可以写成

$$(J_\mu)_e = (J_\mu)_{e\Delta I=0} + (J_\mu)_{e\Delta I=1}, \quad (22.19)$$

$$(J_\mu)_{e\Delta I=0} = i q^{a\dagger} \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda^8 \gamma_4 \gamma_\mu q^a, \quad (22.20)$$

$$(J_\mu)_{e\Delta I=1} = i q^{a\dagger} \frac{1}{2} \lambda^3 \gamma_4 \gamma_\mu q^a, \quad (22.21)$$

其中  $\Delta I \equiv |\Delta \mathbf{I}|$ . 比较和分析 (22.13) — (22.21) 式, 可以得到许

多重要的结论:

i)  $V_\mu$ ,  $(J_\mu)_8$  及  $\bar{V}_\mu$  都是矢量流, 它们之间的不同之处只是分别包含着味  $SU_3$  的八个  $\lambda^i$  矩阵的不同成员, 所以, 它们属于味  $SU_3$  的同一八维表示,

ii)  $(J_\mu)_{\Delta s \neq 0}$  满足  $\Delta s = \Delta Q$  和  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$  规则,

从 (22.17) 式可知,  $(J_\mu)_{\Delta s \neq 0}$  把  $u$  夸克变成  $s$  夸克, 其电荷、奇异数及同位旋的改变见表 22.1. 显然, 确实有  $\Delta s = \Delta Q$  及  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ . 我们举几个实际例子来说明这两个规则.

表 22.1

	$s$ 夸克	$u$ 夸克
$s$	-1	0 $\Delta s = -1$
$Q$	-1/3	2/3 $\Delta Q = -1$
$I$	0	1/2 $ \Delta I  = \frac{1}{2}$

1) 如果  $\Delta s = \Delta Q$  规则成立, 则

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + l^- + \bar{\nu}_l,$$

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^- + l^+ + \nu_l,$$

$$\Sigma^+ \rightarrow n + l^+ + \nu_l$$

是禁戒的, 而

$$K^0 \rightarrow \pi^- + l^+ + \nu_l,$$

$$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ + l^- + \bar{\nu}_l,$$

$$\Sigma^- \rightarrow n + l^- + \bar{\nu}_l$$

是允许的, 实验与此符合.

2) 如果  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$  规则成立, 则有

$$\frac{\text{衰变率}(K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l)}{\text{衰变率}(K^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu_l)} = 2. \quad (22.22)$$

对于此式的推导, 我们要作些解释. 我们知道,  $\pi$  介子是同位旋矢

量,可记为

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \pi^{\dagger}, \quad (22.23)$$

K 介子则是同位旋矢量:

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}. \quad (22.24)$$

定义

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - i\pi_2) \quad (22.25)$$

为消灭  $\pi^+$  产生  $\pi^-$  的场算符,  $\pi^3$  为产生或消灭  $\pi^0$  的场算符. 由于 K 和  $\pi$  属于味  $SU_3$  的同一八重态, 有相同的宇称, 所以,  $(J_\mu)_8$  中只有  $V_\mu$  对  $\langle \pi | J_\mu | K \rangle$  有贡献, 从而  $K \rightarrow \pi l^+ \nu_l$  的矩阵元正比于

$$\langle \pi | V_\mu | K \rangle \langle l^+ \nu_l | j_\mu | 0 \rangle.$$

下面我们要唯象地写出一个适合这里应用的  $V_\mu$  的表达式. 显然, 对于此式, 下列要求是合理的: (1) 线性地依赖于 K 场及  $\pi$  场; (2) 是洛伦兹矢量; (3) 属于  $I = \frac{1}{2}$  的表示以保证  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$  规则成立. 满足所有这些要求的  $V_\mu$  的表达式是唯一的(可以只差一系数因子), 即

$$V_\mu \sim \left( \pi \cdot \tau \frac{\partial}{\partial x_\mu} K \right)_{I=\frac{1}{2}}. \quad (22.26)$$

将 (22.23) 及 (22.24) 式代入上式, 即得到

$$V_\mu \sim \pi_3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} K^+ + (\pi_1 - i\pi_2) \frac{\partial}{\partial x_\mu} K. \quad (22.27)$$

注意到 (22.25) 式, 即可知  $K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$  与  $K^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu_l$  的振幅之比为  $\sqrt{2}$ , 从而衰变率之比为 2.

应当强调一下, 这里所说的  $|\Delta I|$  是终态与初态同位旋矢量差的大小, 而不是同位旋大小之差. 所以, 对于  $K \rightarrow \pi l^+ \nu_l$  过程, 如果没有  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$  规则,  $|\Delta I|$  就可以是  $\frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{2}$ , 也就没有 (22.22) 式。



(22.22) 式与实验符合, 证明了  $|\Delta\mathbf{I}| = \frac{1}{2}$  规则成立.

iii)  $(J_\mu)_{\Delta I=0}$  满足  $|\Delta\mathbf{I}| = 1$  规则.  $(J_\mu)_{\Delta I=0}$  及  $(\bar{J}_\mu)_{\Delta I=0}$  是同一个同位旋矢量的  $I_z = \pm 1$  的分量.

从 (22.16) 式, 显然  $(J_\mu)_{\Delta I=0}$  的  $\Delta I_z = -1$ ,  $(\bar{J}_\mu)_{\Delta I=0}$  的  $\Delta I_z = +1$ . 由于  $u(\bar{u})$  和  $d(\bar{d})$  的  $|\mathbf{I}| = \frac{1}{2}$ ,  $(J_\mu)_{\Delta I=0}$  及  $(\bar{J}_\mu)_{\Delta I=0}$  的  $|\Delta\mathbf{I}|$  可以是 0 或 1, 不过, 已经知道它们的  $\Delta I_z = \pm 1$ , 故  $|\Delta\mathbf{I}|$  不能为 0, 只能为 1. 由此规则可以得到

$$|\text{振幅}(\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 e^+ \nu_e)| = |\text{振幅}(\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 e^- \bar{\nu}_e)|,$$

此式与实验符合.

iv)  $(\cos\theta_c)^{-1}(V_\mu)_{\Delta I=0}$ ,  $(J_\mu)_{\Delta I=1}$ ,  $(\cos\theta_c)^{-1}(\bar{V}_\mu)_{\Delta I=0}$  形成同一同位旋矢量的  $I_z = -1, 0, +1$  分量.

将  $(J_\mu)_{\Delta I=0}$  写为

$$\begin{aligned} (J_\mu)_{\Delta I=0} &= (V_\mu)_{\Delta I=0} + (A_\mu)_{\Delta I=0}, \\ (V_\mu)_{\Delta I=0} &= i q^{a\dagger} \frac{1}{2} (\lambda_1 - i\lambda_2) \cos\theta_c \gamma_4 \gamma_\mu q^a, \end{aligned} \quad (22.28)$$

$$(\bar{V}_\mu)_{\Delta I=0} = i q^{a\dagger} \frac{1}{2} (\lambda_1 + i\lambda_2) \cos\theta_c \gamma_4 \gamma_\mu q^a. \quad (22.29)$$

比较 (22.28)、(22.29) 与 (22.21) 式, 注意到  $\lambda^1 \lambda^2 \lambda^3$  是同位旋为 1 的三个  $SU_3$  的生成元, 即知  $(\cos\theta_c)^{-1}(V_\mu)_{\Delta I=0}$ ,  $(J_\mu)_{\Delta I=1}$  及  $(\cos\theta_c)^{-1}(\bar{V}_\mu)_{\Delta I=0}$  确实属于同一同位旋三重态. 应用这一性质, 可以证明

$$\frac{\langle \pi^0 | (V_\mu)_{\Delta I=0} | \pi^+ \rangle}{\langle \pi^+ | (J_\mu)_{\Delta I=1} | \pi^+ \rangle} = \sqrt{2} \cos\theta_c, \quad (22.30)$$

由此可进而计算  $\pi^- \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$  的速率.

下面我们先给出由 (22.30) 式计算  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$  衰变率的方法, 然后再证明 (22.30) 式.

注意, (22.30) 式中, 分子及分母上的初态及终态  $\pi$  应当分别具有相同的动量. 对于  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$  过程, 在初态  $\pi^+$  的静止系中,

终态  $\pi^0$  的动量是很小的, 因此, 相应地, 对于分母, 也只要考虑初态及终态  $\pi^+$  静止的情况. 我们知道,  $\pi$  介子的电荷  $Q = I_z$  是同位旋矢量, 所以  $\langle \pi^+ | (J_\mu)_3 | \pi^+ \rangle = \langle \pi^+ | (J_\mu)_{\Delta I=1} | \pi^+ \rangle$ . 对于静止的  $\pi^+$ , 其电流密度  $\langle \pi^+ | (J_i)_3 | \pi^+ \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为零, 电荷密度  $\langle \pi^+ | (J_4)_3 | \pi^+ \rangle$  是知道的, 于是, 由 (22.30) 式, 就可定出  $\langle \pi^0 | (V_\mu)_{\Delta I=0} | \pi^+ \rangle$ , 再由

$$\langle \pi^0 | (J_\mu)_3 | \pi^+ \rangle = \langle \pi^0 | (V_\mu)_{\Delta I=0} | \pi^+ \rangle,$$

即可计算  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$  的衰变率. 结果是

$$\frac{\text{衰变率}(\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)}{\text{衰变率}(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = 1.07 \times 10^{-8}, \quad (22.31)$$

它与实验值  $(1.02 \pm 0.07) \times 10^{-8}$  符合. 此值很小的原因, 是  $\pi^+$  与  $\pi^0$  质量很接近, 使得  $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$  的相空间很小.

现在我们转而证明 (22.30) 式. 首先,  $\langle \pi | V_\mu | \pi \rangle$  中, 初态及终态  $\pi$  都在质量壳上, 可以取场  $\pi(x)$  满足自由场方程. 其次, 这里要用的  $V_\mu$  的唯象表达式应满足下列要求: 1) 既是洛伦兹矢量, 又是同位旋矢量; 2) 是  $\pi(x)$  的二次函数; 3) 是守恒流. 容易证明, 满足这些要求的唯象流形式是唯一的(可以差一个系数),

$$\sim [\mathcal{J}_\mu(x)]_k = -i\pi_i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \pi_j \epsilon_{ijk}. \quad (22.32)$$

令

$$(J_\mu)_{\Delta I=1} \sim [\mathcal{J}_\mu(x)]_3 = (\pi^+)^\dagger \frac{\partial}{\partial x_\mu} \pi^+ - \pi^+ \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\pi^+)^\dagger,$$

则

$$\begin{aligned} (V_\mu)_{\Delta I=0} &\sim \cos \theta_c [(\mathcal{J}_\mu(x))_1 - i(\mathcal{J}_\mu(x))_2] \\ &= \sqrt{2} \cos \theta_c \left( \pi^+ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \pi^0 - \pi^0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \pi^+ \right), \end{aligned}$$

比较上述两式, 即得 (22.30) 式.

$(\cos \theta_c)^{-1} V_\mu$ ,  $(J_\mu)_{\Delta I=1}$  及  $(\cos \theta_c)^{-1} \bar{V}_\mu$  确实属于同一同位旋矢量, 它的另一个实验证据是著名的  $B^{12}$ ,  $C^{12*}$ ,  $N^{12}$  到  $C^{12}$  的  $\beta$  或  $\gamma$  辐射衰变(见图 22.2).

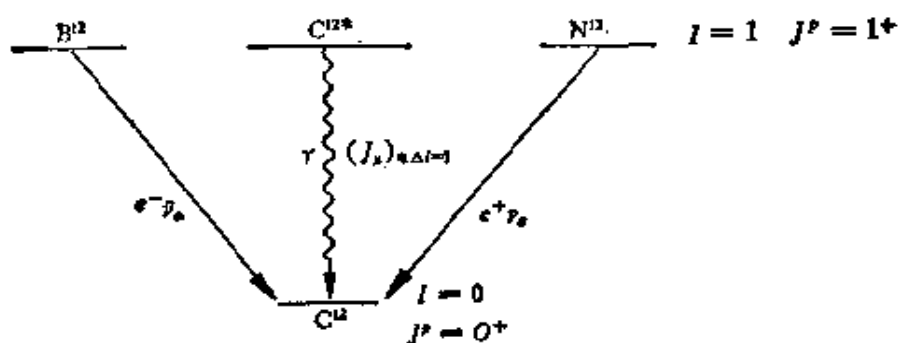


图 22.2

这里前三个态是  $J^p = 1^+$ ,  $I = 1$  的三重态,  $C^{12}$  则是  $J^p = 0^+$ ,  $I = 0$  的态, 三个衰变对应的流分别为  $(V_\mu)_{\Delta S=0}$ ,  $(J_\mu)_{\Delta S=0, \Delta I=1}$ ,  $(\bar{V}_\mu)_{\Delta S=0}$ . 所以, 只要知道了其中一个衰变的矩阵元(例如,  $C^{12*}$  的辐射衰变), 其它两个就可以计算出来. 实际计算两个  $\beta$  衰变的  $e^\pm$  的能谱, 得到的结果为

$$\propto 1 \pm \lambda E_{e^\pm},$$

其中  $\lambda$  为

$$\lambda_{\text{理论}} = \frac{8}{3} \frac{\mu_p - \mu_n}{2m_p} \left| \frac{G_V}{G_A} \right|_{\beta \text{ 衰变}} = 0.0057/\text{MeV}, \quad (22.33)$$

这里  $\mu_p$  及  $\mu_n$  分别为质子及中子的磁矩,  $G_V = G_F$  是费米耦合常数,  $G_A$  是盖莫夫-泰勒 (Gamow-Teller) 常数,  $G_A/G_V$  大约是 1.2. 实验测量的结果是

$$\lambda_{\text{实验}} = \begin{cases} 0.0055 \pm 0.001/\text{MeV}, & \text{对 } e^-, \\ 0.0052 \pm 0.0006/\text{MeV}, & \text{对 } e^+, \end{cases}$$

与理论值符合.

注意 (22.33) 式把电磁作用中出现的  $\mu_p$  及  $\mu_n$  与弱作用的量联系起来, 这是很重要的. 它暗示弱作用与电磁作用可能有着内在联系.

在这一节的最后, 我们简单地提一下弱流的味  $SU_3$  性质对重子弱过程的应用. 对于  $(J_\mu)_\text{弱}$  在重子八重态间的矩阵元  $\langle B^i_j | (J_\mu)_\text{弱} | B^k_l \rangle$ , 由于  $8 \otimes 8$  中只包含两个独立的  $8$ , 故矩阵元只有两个独立常数, 由此就可以建立起许多重子弱过程间的关系.

详细的结果这里不再讨论,读者可参阅习题 28.

### § 22.3 无轻子弱相互作用

实验上,  $\Delta s \approx 0$  的无轻子弱衰变有一个重要的特点,这就是  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$  规则也成立. 如果无轻子弱作用也像前面讲过的几种弱作用一样,可以写成流流耦合的形式,则

$$\mathcal{L}_{\text{无轻}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu \bar{J}_\mu + \text{中性流部分}.$$

根据 (22.13) — (22.17) 式以及上节的讨论,  $J_\mu$  中既有  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ ,  $\Delta s \approx 0$  的部分, 也有  $|\Delta I| = 1$ ,  $\Delta s = 0$  的部分. 在  $J_\mu \bar{J}_\mu$  中,  $\Delta s \approx 0$  的部分必定是流中  $\Delta s = 0$  的部分与  $\Delta s \approx 0$  的部分的乘积, 因此, 它既包括有  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$  的部分, 也包括有  $|\Delta I| = \frac{3}{2}$  的部分. 但是, 实验上  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$  的振幅  $\gg |\Delta I| = \frac{3}{2}$  的振幅. 例如, 对  $\Lambda \rightarrow N\pi$ ,  $\Lambda$  的同位旋为 0, 一般的  $N\pi$  体系同位旋可以是  $\frac{1}{2}$  及  $\frac{3}{2}$ , 但实验上测得的终态  $N\pi$  却几乎全处于同位旋为  $\frac{1}{2}$  的状态. 在  $K \rightarrow 2\pi$  衰变中, 也看到了几乎全是  $|\Delta I| = \frac{1}{2}$  的振幅起作用的现象. 对于这一现象的起源, 目前的解释还很不圆满.

### § 22.4 么正极限

在前面讨论的费米的弱作用唯象理论中, 拉氏量用流乘流的形式描写, 这种描写不可能完全正确. 下面我们从么正极限的角度来说明这一点.

我们已经讲过, (22.2) 式中第一项在描写  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$  时极为准确. 现在, 我们将它应用到高能  $\nu_\mu e$  散射:

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_e + \mu,$$

看看究竟会发生一些什么问题。

设在质心系中  $\nu_\mu$  的动量大小为  $p_\nu = |\mathbf{p}_\nu|$ , 且  $p_\nu \gg m_e, m_\mu$ , 从而可以忽略  $m_e$  及  $m_\mu$ , 则  $\nu_\mu$  只与左旋的  $e^-$  作用. 只考虑  $s$  波, 计算得到

$$\sigma(\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-) = \frac{8}{\pi} (G_F p_\nu)^2. \quad (22.34)$$

这个式子在能量为几个 GeV 时是正确的, 但当能量很高时不可能正确, 这就是下列定理告诉我们的.

**定理** 对任何一个  $s$  波反应, 必有

$$\text{弹性截面 } \sigma_{\text{弹性}} \leq 4\pi\lambda^2, \quad (22.35)$$

$$\text{非弹性截面 } \sigma_{\text{非弹}} \leq \pi\lambda^2, \quad (22.36)$$

其中  $\lambda \equiv \frac{1}{p}$ ,  $p$  为质心系动量的大小. 这就是著名的么正极限.

此定理的证明如下:

由  $a$  态到  $b$  态的  $S$  波截面为

$$\sigma(a \rightarrow b) = \pi\lambda^2 |\langle b | S - 1 | a \rangle|^2,$$

其中  $S$  为  $S$  矩阵. 因为  $S = 1$  表示没有作用, 所以  $S - 1$  代表相互作用的部分.  $\lambda^2$  可以从量纲分析得出, 因子  $\pi$  可以从计算任一最简单的低阶过程定出.

先考虑弹性散射, 即  $a = b$ . 令

$$S_{aa} = \langle a | S | a \rangle = e^{2i\delta},$$

其中  $\delta$  一般是复数. 由于  $S$  矩阵是么正矩阵, 有  $\sum_b |S_{ab}|^2 = 1$ ,

所以必有  $|S_{aa}| = |e^{2i\delta}| \leq 1$ , 于是

$$\sigma_{a \rightarrow a} = \pi\lambda^2 |e^{2i\delta} - 1|^2 \leq 4\pi\lambda^2.$$

对于非弹性散射,  $\langle b | 1 | a \rangle = 0$ , 所以,

$$\sigma_{a \rightarrow b} = \pi\lambda^2 |S_{ab}|^2 \leq \pi\lambda^2.$$

定理证毕.

显然, (22.36) 式对 (22.34) 式的应用范围给出了很强的限制. 将 (22.34) 式代入 (22.36) 式, 即得

$$\frac{8}{\pi} (G_F p_\nu)^2 \leq \pi k^2 = \pi \frac{1}{p_\nu^2},$$

$$p_\nu \leq \left(\frac{\pi^2}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{G_F}} \sim 300 \text{ GeV}. \quad (22.37)$$

这就是说, 当  $p_\nu > 300 \text{ GeV}$  时, (22.2) 式必定不能再用, 费米理论必须修改.

怎样修改呢? 最简单的办法是在流与流之间放进一个传播子

$$L_{\text{流}} \sim g^2 \int dx dx' \mathcal{J}_\lambda(x) D_{\lambda\lambda'}(x-x') \mathcal{J}_{\lambda'}(x'). \quad (22.38)$$

由于流是矢量, 与此传播子相应的粒子自然应是自旋为 1 的粒子, 人们称它为中间玻色子  $W$ . 上式中的  $g$  是  $W$  与流的耦合常数.

我们来估计一下  $m_W$  的大小.

(22.38) 式与费米理论的主要差别在于前者多了一个中间玻色子的传播子

$$\frac{-i}{k^2 + m_W^2}.$$

对于低能过程,  $k^2 \ll m_W^2$ ,  $\frac{-i}{k^2 + m_W^2} \rightarrow \frac{-i}{m_W^2}$  是常数, 结果与费米

理论一样. 对于高能散射,  $k^2 \gg m_W^2$ ,  $\frac{-i}{k^2 + m_W^2} \rightarrow \frac{-i}{k^2} \rightarrow 0$ , 这

就改善了费米理论的高能行为. 前面已经提到, 在费米理论中, 么正极限的破坏是在能量约为  $300 \text{ GeV}$  处发生的, 所以, 要想依靠中间玻色子的传播子来克服这一困难, 就必须使得此传播子在能量达到  $300 \text{ GeV}$  之前就充分起作用. 这意味着,  $m_W$  必须在  $300 \text{ GeV}$  之下.

另一方面, 低能极限下此理论应该与费米理论一样, 所以应有

$$\frac{g^2}{m_W^2} \sim G_F.$$

如果  $g^2$  与电磁作用的数量级相同, 即  $\sim \alpha = \frac{1}{137}$ , 则有

$$m_W \sim \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{G_F}} \sim 30 \text{ GeV}.$$

其实，早在四十年代末，就有了关于可能存在着中间玻色子的猜测。在五十年代已有了上述质量估计。不过，更确切地给出  $m_W$  数值的，是六十年代末期提出的温伯格理论。这点将在第二十五章再讲述。

寻找中间玻色子是高能物理研究最重要的内容之一。目前世界上所有即将建造的大加速器，都把中间玻色子作为最重要的探索目标，因为它不仅对于弱作用理论发展的十分重要，而尤其重要的是，对于证明弱作用究竟是否与电磁作用有同一根源，更具有巨大意义。

## 第二十三章 无标度假设

### § 23.1 无标度假设

理论上,高能粒子反应中的无标度性 (scaling property) 是无标度假设 (scaling hypothesis) 的结果。无标度假设是布约肯 (Bjorken) 和其他一些人首先建议的,它相当简单,又很有用,经过近年来的研究,对其可靠到什么程度,也已了解得比较透彻了。

本章在叙述无标度假设时,所用的方式与布约肯等最初所用的方式有所不同。或许,这里的方式与实验结果的联系更直接些,对于轻子及强子的处理也显得更对称。

我们先回顾一下物理学发展过程中的能量标度 (见图 23.1)。

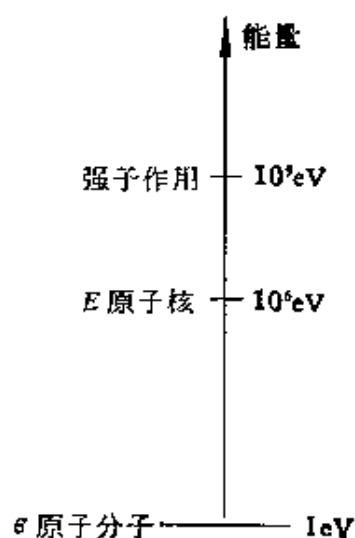


图 23.1

在研究原子-分子过程时,我们关心的问题,如电子激发等,涉及的能量为电子伏特数量级,这就是说,原子和分子物理学的能量标度是 eV。类似地,原子核物理学的能量标度是  $10^6$  eV, 强子物理学的能量标度是  $10^9$  eV。在每一个能量标度处,人们遇到丰富多彩的能级结构以及相应的动力学。但是,当人们研究高得多的能量处的现象时,就可以不考虑低能量标度处的这些细节。例如,在研究原子核反应时,可以不考虑核外束缚的电子如何变化这种细节,因为前者涉

及的能量是 MeV 数量级,后者涉及的仅仅是 eV 数量级,两者相差好几个数量级。同理,在讨论能量为 GeV ( $10^9$  eV) 数量级的核子



碰撞时,可以不管核子在原子核中的束缚能。这些都是大家熟知的。循此思路,下一步人们自然会问,在什么情况下,  $10^9$  eV 能量标度处的细节可以忽略呢?这正是无标度假设所要讨论的。

在本章中,将只考虑轻子或半轻子反应。例如

$$\begin{aligned}
 \mu^+ + e^- &\rightarrow \mu^+ + e^-, \\
 e^- + N &\rightarrow e^- + \text{强子}, \\
 \nu_\mu + N &\rightarrow \mu^- + \text{强子}, \\
 e^+ + e^- &\rightarrow \mu^+ + \mu^-, \\
 e^+ + e^- &\rightarrow \text{强子}, \\
 p + p &\rightarrow l^+ + l^- + \dots, \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{23.1}$$

它们或者是二阶电磁过程,或者是一阶弱过程。本章将不讨论纯强子过程,这是因为要能应用无标度假设,需要真正激烈的碰撞。在纯强子反应中,很大一部分截面属于朝前反应(“影子”效应),其强子间的动量交换并不大,实际上是不激烈的“软”碰撞。采用轻子的反应就不同,有很多大动量交换事例,属于激烈的碰撞。

在讨论半轻子反应时,我们总是把所有的强子终态加起来。这与我们想要忽略  $10^9$  eV 处强子物理的细节有关。容易想像,如果只是讨论一个特定的强子终态,就很可能不得不涉及这个特定终态的特有细节。通常,这种将强子终态加起来的反应叫内含反应 (inclusive reaction)。下面我们叙述无标度假设。

对于 (23.1) 类型的反应,如将其截面相当一般地写为

$$d\sigma = f(s, q^2, m_l, m_N) \begin{cases} \alpha^2, & \text{对二阶电磁过程,} \\ G_F^2, & \text{对一阶弱过程,} \end{cases}
 \tag{23.2}$$

其中

$$\begin{aligned}
 s &\equiv (\text{质心系能量})^2, \\
 q^2 &\equiv \text{各种有关的四动量传递的平方}, \\
 m_l &\equiv \text{各种轻子质量}, \\
 m_N &\equiv \text{各种强子质量},
 \end{aligned}$$

则无标度假设可以表述如下:

i) 如果  $s$  和  $|q^2| \gg m_l^2$ , 则在  $d\sigma$  的表达式中, 取  $m_l = 0$  是一种很好的近似.

ii) 如果  $s$  和  $|q^2| \gg m_N^2$ , 且已将所有的强子终态加起来, 则在  $d\sigma$  中取  $m_N = 0$  是一种很好的近似.

上述假设意味着, 当  $s$  和  $|q^2|$  大于几个  $\text{GeV}^2$  时, 在  $d\sigma$  中取  $m_l = m_N = 0$  是很好的近似, 从而, (23.2) 式成为

$$d\sigma = f(s, q^2) \begin{cases} \alpha^2, \\ G_p^2. \end{cases} \quad (23.3)$$

显然, 这也就是说, 除耦合常数以外, 微分截面表达式只依赖于量纲为  $[l]^{-2}$  的  $s$  和各种  $q^2$ , 再没有任何其它的基本的能量标度.

应用无标度假设加上量纲分析, 可以得到很多有用的结果, 下一节就讨论这些应用.

## § 23.2 无标度假设的应用

i) 考虑下列两个电磁过程:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-, \quad (23.4)$$

$$e^+ + e^- \rightarrow \text{强子}, \quad (23.5)$$

由无标度假设, 如果

$$s = (\text{质心系能量})^2 \gg m_\mu^2,$$

则在 (23.4) 式的截面表达式中可取  $m_e = m_\mu = 0$ , 于是, 从量纲分析, 即得

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \text{常数} \frac{\alpha^2}{s}.$$

常数的具体数值可以用量子电动力学算出(如果不考虑辐射修正, 量子电动力学是符合无标度假设的). 结果为

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (23.6)$$

类似地, 对半轻子反应(23.5), 如果  $s$  大于几个  $\text{GeV}^2$ , 并且对所有终态强子道求和, 就可以取  $m_l = m_N = 0$ . 再用量纲分析, 同样导致

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{强子}) = \text{常数} \frac{\alpha^2}{s}.$$

注意对特定的强子道,例如  $e^+e^- \rightarrow \rho^0$ , 不能应用无标度假设,也不能忽略  $\rho^0$  的质量及宽度等,因而上式并不成立.

ii) 考虑下列弱作用过程:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e \quad (23.7)$$

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + \text{强子}. \quad (23.8)$$

令  $q^2$  为入射  $\nu_\mu$  和靶粒子间的四动量传递的平方,  $s$  为质心能量的平方. 根据无标度假设, 对于 (23.7), 如果  $s$  及  $q^2 \gg m_\mu^2$ , 则在  $d\sigma$  的式子中, 可取  $m_e = m_\mu = 0$ . 对于 (23.8) 式, 如果  $s$  及  $q^2$  大于几个  $\text{GeV}^2$ , 并将所有的终态强子道加起来, 就可取  $m_l = m_N = 0$ . 由于 (23.7) 及 (23.8) 都是一阶弱过程, 故微分截面都正比于  $G_F^2$ . 考虑到  $G_F$  的量纲是  $[l]^2$ , 用量纲分析, 可以得到两个反应的微分截面都必定为如下形式:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = G_F^2 f\left(\frac{q^2}{s}\right), \quad (23.9)$$

其中  $f$  是无量纲函数, 只能依赖于  $q^2/s$  (当然, 对于这两个反应,  $f$  的具体形式可以不同). 由于  $q^2$  的最大值  $q_{\text{max}}^2 = s$ ,  $q^2/s$  的允许的变化范围是从 0 到 1, 所以, 对 (23.9) 积分, 即得到总截面为

$$\sigma = G_F^2 s \int_0^1 d\left(\frac{q^2}{s}\right) f\left(\frac{q^2}{s}\right) \propto G_F^2 s. \quad (23.10)$$

对于反应 (23.7), (23.10) 式中的比例常数, 可以用上一章讲过的流-流耦合理论算出. 在取  $m_e = m_\mu = 0$  的近似后, 有

$$\frac{d\sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_e \mu^-)}{dq^2} = \frac{1}{\pi} G_F^2. \quad (23.11)$$

在质心系中,

$$\begin{aligned} s &= -(p_{\nu_\mu} + p_e)^2 = 4|\mathbf{p}_{\nu_\mu}|^2, \\ q^2 &= (\mathbf{p}_{\nu_\mu} - \mathbf{p}_\mu)^2 = (|\mathbf{p}_{\nu_\mu}| - |\mathbf{p}_\mu|)^2 \\ &= 2|\mathbf{p}_{\nu_\mu}|^2(1 - \cos\theta) = \frac{s}{2}(1 - \cos\theta), \end{aligned} \quad (23.12)$$

其中  $\theta$  是  $\mathbf{p}_\mu$  与  $\mathbf{p}_{\nu_\mu}$  的夹角, 将(23.11)式积分, 并应用(23.12)式, 即得到

$$\sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e) = \frac{1}{\pi} G_F^2 s. \quad (23.13)$$

此式实际上就是上一章中的(22.34)式, (只是在那里, 初态是  $e^-$ , 不包含实际上不参加反应的  $e^+$ , 所以, (22.34) 式右边比 (23.13) 式大一倍.)

(23.11) 及 (23.13) 式符合 (23.9) 及 (23.10) 式. 对于中微子与核子的反应 (23.8), 欧洲联合核子研究中心的实验结果见图 23.2, 它可以表达为

$$\sigma(\nu_\mu N \rightarrow \mu^- + \dots) \approx 0.6 \times 10^{-38} (E_\nu)_\text{GeV} / \text{GeV}, \quad (23.14)$$

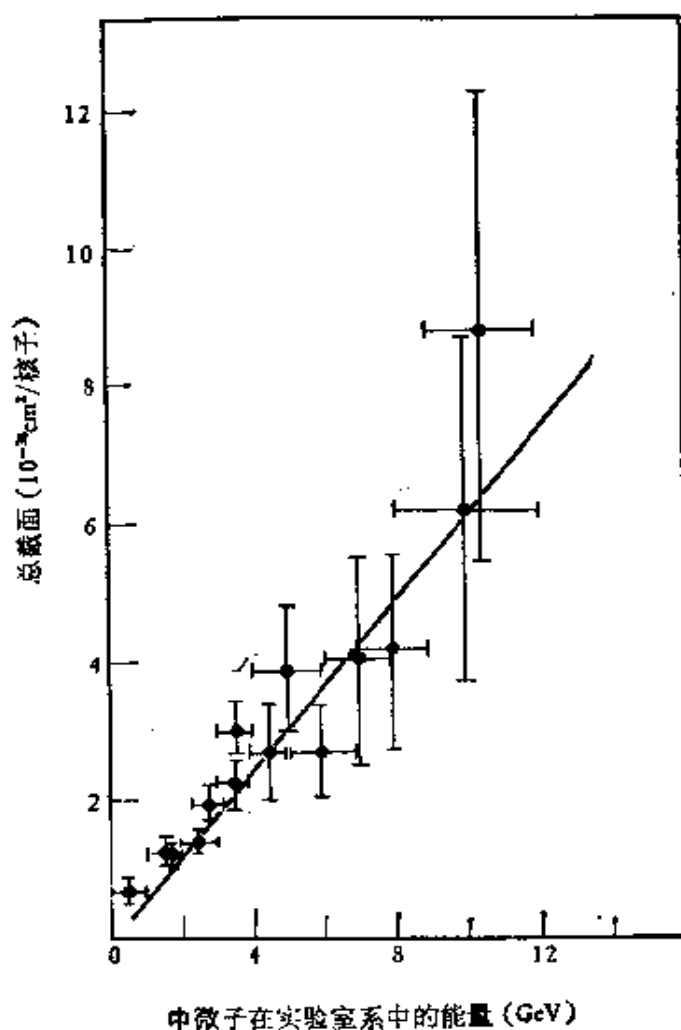


图 23.2

其中  $(E_\nu)_*$  是实验室系中的中微子能量。注意到在实验室系中,

$$s = [(E_\nu)_* + m_N]^2 - |\mathbf{p}_\nu|_*^2 \approx 2m_N(E_\nu)_*,$$

由此可知, (23.14) 式与 (23.10) 式是一致的。

iii) 考虑下列二电磁过程:

$$e^\pm + \mu^\pm \rightarrow e^\pm + \mu^\pm, \quad (23.15)$$

$$e^\pm + N \rightarrow e^\pm + \text{强子}. \quad (23.16)$$

我们先考虑后一过程, 其中“强子”意味着对所有的终态强子道求和。通常, 人们引进

$$\begin{aligned} s &\approx 2m_N(E_e)_*, \\ q^2 &= (k - k')^2, \\ M^2 &= (\text{终态强子系统的不变质量})^2 \\ &= -(p + q)^2 \end{aligned} \quad (23.17)$$

以及标度变量

$$x = -q^2/2p \cdot q, \quad (23.18)$$

或

$$\omega = \frac{1}{x} = -\frac{2pq}{q^2} = 1 + \frac{1}{q^2}(M^2 - m_N^2). \quad (23.19)$$

上面各式中动量的定义见图 23.3,  $x$  和  $\omega$  这两种标度变量在文献中都是常见的。注意,  $q^2$  只与轻子动量有关, 取值范围是从 0 到  $s$ ,  $M^2$  的最小值是  $m_N^2$ , 最大值是  $s$ , 故  $\omega$  的最小值为 1, 最大值  $\approx s/q^2$ 。根据无标度假设, 当  $s$  和  $q^2$  大于几个  $(\text{GeV})^2$  时, 可以取  $m_l = m_N = 0$ , 所以

$$\omega = 1 + \frac{M^2}{q^2},$$

微分截面只依赖于  $q^2$ ,  $s = q_{\text{max}}^2$  及  $M^2$ 。再从量纲分析可以导出,  $e$ - $p$  深度非弹性散射的微分截面为

$$\frac{d^2\sigma(ep \rightarrow e + \text{强子})}{dq^2 d\omega} = \frac{\alpha^2}{(q^2)^2} F\left(\frac{q^2}{s}, \omega\right). \quad (23.20)$$

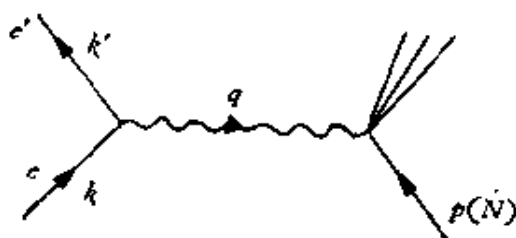


图 23.3

对于纯轻子反应 (23.12), 结果也是一样的。不过, 它是弹性过程。从 (23.19) 式知道, 弹性过程的  $\omega = 1$ , 函数  $F$  应正比于  $\delta(\omega - 1)$ , 从而 (23.20) 式为下式所代替:

$$\frac{d\sigma(e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+)}{dq^2} = \frac{\alpha^2}{(q^2)^2} f\left(\frac{q^2}{s}\right), \quad (23.21)$$

(23.21) 式中的  $f\left(\frac{q^2}{s}\right)$  可以用量子电动力学算出。(23.20) 式中的  $F\left(\frac{q^2}{s}, \omega\right)$  对  $\frac{q^2}{s}$  的依赖关系的部分, 也可以计算出来, 因为我们已经说过,  $q^2$  只与轻子动量有关, 而这个过程中的轻子顶角部分是完全知道的。实际进行计算, 并取  $m_e = m_\mu = m_N = 0$ , 则分别可以得到 (参看习题 8 及习题 26)

$$\frac{d\sigma(e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+)}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{(q^2)^2} \left[ 1 - \frac{q^2}{s} + \frac{1}{2} \left( \frac{q^2}{s} \right)^2 \right], \quad (23.22)$$

$$\frac{d\sigma(e^- p \rightarrow e^- + \text{强子})}{dq^2 d\omega} = \frac{4\pi\alpha^2}{(q^2)^2} \left[ \left( \frac{1}{\omega} - \frac{q^2}{s} \right) F_2 + \frac{q^2}{s} F_1 \right], \quad (23.23)$$

其中  $F_1$  和  $F_2$  叫作结构函数, 它们都是只依赖于  $\omega$  的无量纲函数, 来自人们还没有完全搞清楚的强子-光子作用部分。事实上, 从习题 26 可以看到, (23.23) 式是从一些相当普遍的考虑得出的。在那里,  $F_1$  及  $F_2$  写成  $q^2$  及  $p \cdot q$  的函数, 由于  $F_1$  及  $F_2$  都是无量纲的, 所以它们只能是  $\omega$  (或者  $x$ ) 的函数。

实验上, 斯坦福直线加速器中心测量了不同  $q^2$  处的结构函数, 其结果见图 23.4, 数据在 10—15% 的范围内与无标度假设符合。不过, 在更精确的范围内, 无标度假设是不完全正确的, 我们在下一节中再说明这一点。

iv) 无标度假设也可以应用于下列轻子对产生过程:

$$p + p \rightarrow l^+ + l^- + \text{强子}, \quad (23.24)$$

$$p + p \rightarrow l^\pm + \frac{\nu_l}{\bar{\nu}_l} + \text{强子}. \quad (23.25)$$

定义

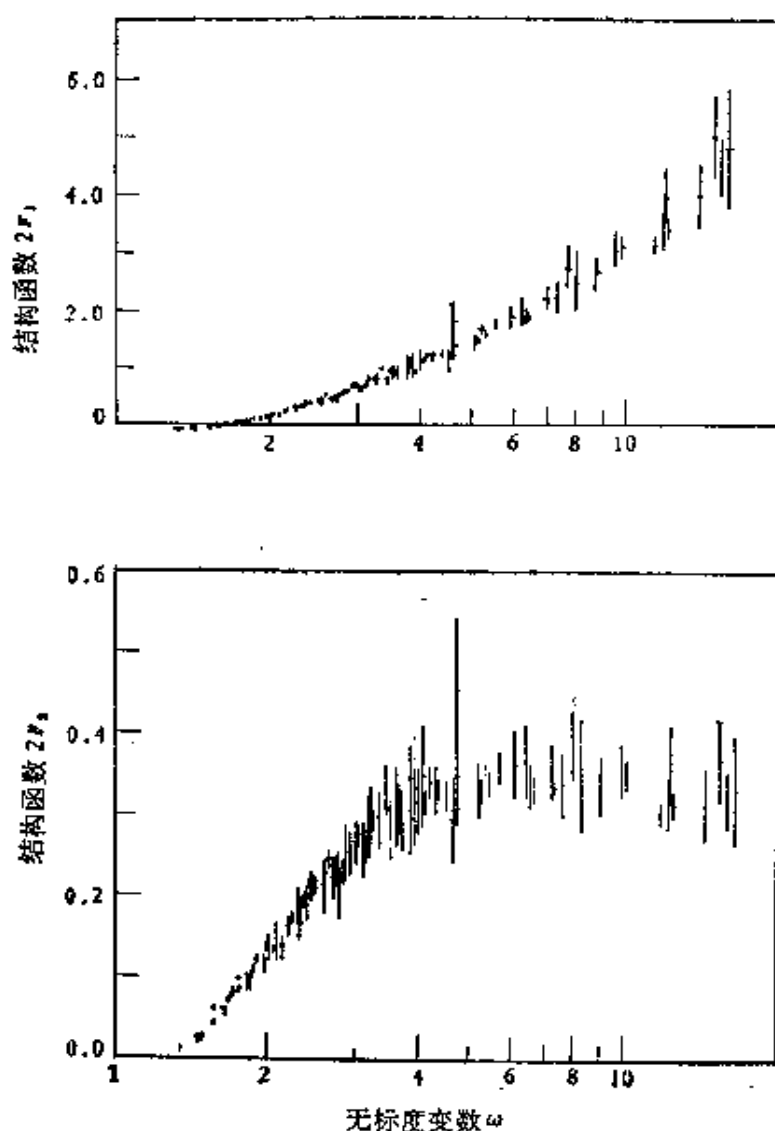


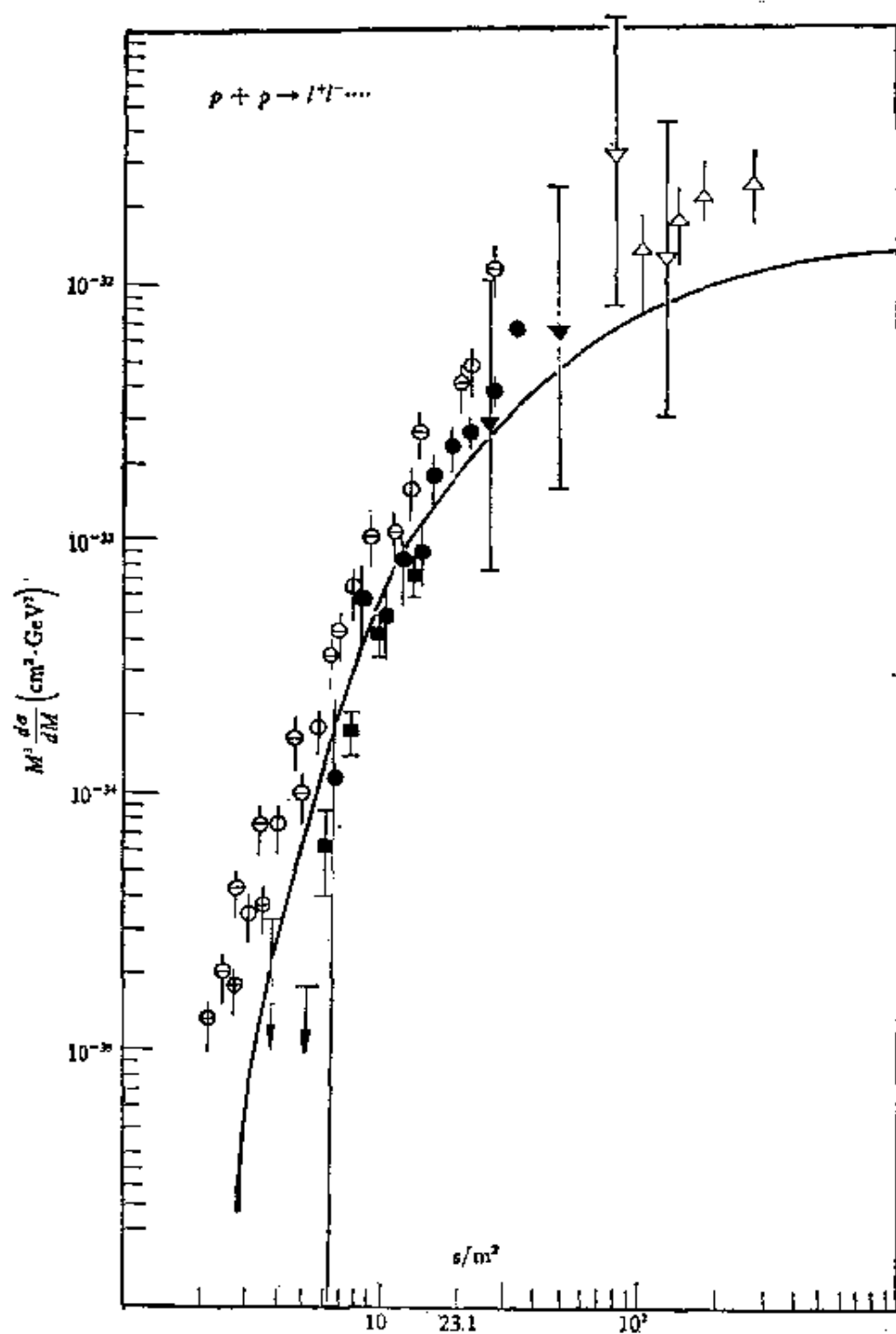
图 23.4

$M^2 \equiv (\text{轻子对不变质量})^2$ .

根据无标度假设, 当  $s$  和  $M^2$  大于几个  $(\text{GeV})^2$ , 并且把所有终态强子道都加起来后, 可以取  $m_l = m_N = 0$ . 于是无论是 (23.24) 式, 还是 (23.25) 式, 其微分截面都只依赖于  $s$  和  $M^2$ . 再从量纲分析即得到

$$\frac{d\sigma(pp \rightarrow l^+l^- + \text{强子})}{dM} = \alpha^2 M^{-3f} \left( \frac{M^2}{s} \right), \quad (23.26)$$

$$\frac{d\sigma(pp \rightarrow l^+\nu + \text{强子})}{dM} = G_F^2 M g \left( \frac{M^2}{s} \right), \quad (23.27)$$



- |                                    |                          |   |
|------------------------------------|--------------------------|---|
| ⊖ 29.5(GeV/c)PU → μμ̄              | } Columbia,<br>BNL, CERN | ▼ CERN-BNL-SYR  |
| ⊙ 25(GeV/c)PU → μμ̄                |                          | $22 \times 22 \left( \frac{\text{GeV}}{c} \right)^2, p \rightarrow e^+ e^-$ |
| ⊕ 22(GeV/c)PU → μμ̄                |                          |   |
| Δ FNAL, Columbia, Hawaii, Illinois |                          | ● Columbia, FNAL, Stony Brook   |
| 300(GeV/c)n → μμ̄                  |                          | 400 (GeV/c)p → μμ̄  |
|                                    |                          | ■ Chicago-Princeton   |
|                                    |                          | 430 (GeV/c), p → μμ̄.   |

图 23.5



其中  $f$  和  $g$  是无量纲函数, 所以只能依赖于  $M^2/s$ . 用费米弱作用理论及量子电动力学, 可以算出这两个反应截面之比为

$$\frac{\frac{d\sigma(pp \rightarrow l^+ \nu_l + \text{强子})}{dM}}{\frac{d\sigma(pp \rightarrow l^+ l^- + \text{强子})}{dM}} = \frac{\xi M^4}{\alpha^2} \left( \frac{G_F}{4\pi} \right)^2, \quad (23.28)$$

其中  $\xi$  定义为

$$\xi = \frac{g(4\pi)^2}{f},$$

它与弱作用流  $V_\mu$ 、 $A_\mu$  及电磁流  $(J_\mu)_e$  的关系是

$$\xi = \left[ \frac{\int \langle pp | V_\mu^\dagger(x) V_\nu(0) + A_\mu^\dagger(x) A_\nu(0) | pp \rangle e^{iqx} d^4x}{\int \langle pp | [J_\mu^\dagger(x)]_e [J_\nu(0)]_e | pp \rangle e^{iqx} d^4x} \right]_{\text{平均}}.$$

$\xi$  的确切值依赖于具体模型, 但它应当是  $O(1)$  数量级. 实验上给出的  $M^3 \frac{d\sigma}{dM} (pp \rightarrow l^+ l^- + \text{强子})$  与  $\frac{s}{M^2}$  的关系的曲线, 见图 23.5. 可以看到, 对于不同的  $s$ , 数据点基本上落在一条曲线上, 这表明实验基本上与无标度假设的结果符合.

### § 23.3 无标度性的破坏

如果无标度假说是严格的, 那末, 高能物理的一大部分, 就会只是验证量纲分析, 而且很快就会变成没有什么意义了. 幸而正如我们马上就会看到的, 有充分的理由相信, 在超高能极限下, 无标度假设不是一个严格的自然定律. 它只是在目前实验研究达到的某一中能范围内近似地正确. 实际上, 有两个互不相关的理由, 使人们相信无标度性会破坏.

i) 如所周知, 一个带电粒子的质量不可能为 0. 理论上, 这与量子电动力学中存在所谓质量奇异性密切相关; 实验上, 这反映在任何高能电子碰撞过程中确实存在着很大的辐射修正这一事实. 在量子电动力学中, 只是在玻恩 (Born) 近似下,  $m_l = 0$  才是高能

极限下正确的近似。高阶图不可避免地导致正比于  $\left(\alpha \ln \frac{s}{m_l^2}\right)^n$  的项。在高能极限下，这些项是主要的，而且不能取  $m_l \rightarrow 0$ 。这说明即使对于轻子，也没有理由相信，在无限能量极限下，无标度假设是一个严格的自然定律。它只是在一个相当宽的但是有限的能量范围内近似地成立。类似地，在量子色动力学中，也有  $\sum_n [g^2 \ln(sR^2)]^n C_n$  型的领头项破坏无标度性，这里  $R$  是强子半径。顺便指出， $R$  的大小虽然不影响领头项的行为，但影响次领头项。在计算次领头项时应注意这一点。

ii) 一个新的能量标度的出现（例如  $m_W$ ），会使高能物理进入一个新的领域，遇到新的丰富的能级结构和动力学，导致无标度性的破坏。

讲到这里，我们不妨对尚不知道的能量标度作一点有趣的猜测。如果新的能量标度确实是在  $m_W \sim 30 \text{ GeV}$  附近，则从图 23.1，似乎相邻的能量标度的比有如下关系：

$$\frac{10^6 \text{ eV}}{1 \text{ eV}} : \frac{10^9 \text{ eV}}{10^6 \text{ eV}} : \frac{30 \times 10^9 \text{ eV}}{10^9 \text{ eV}} \approx 10^6 : \sqrt{10^6} : \sqrt[4]{10^6},$$

也就是说，能量标度之间的距离以平方根的比例愈来愈靠近。这是否意味着随着能量的升高，能量标度将愈来愈难以分离呢？这个问题是有意思的，但是还是不清楚的。

不管这些猜测究竟是否正确，目前人们对能量在  $m_W$  附近的物理学是十分感兴趣的，其中特别值得注意的是温伯格弱电统一理论，我们将在下面讨论这一理论。在此以前，作为准备，需要先讨论戈德斯通 (Goldstone) 机制及希格斯 (Higgs) 机制。

## 第二十四章 戈德斯通机制 和希格斯机制

### § 24.1 戈德斯通机制

我们先讨论同位旋  $SO_3$  群 (或  $SU_2$  群) 规范对称性的自发破缺.  $SO_3$  群比温伯格理论中的  $SU(2) \times U(1)$  群简单, 但已经有戈德斯通及希格斯现象, 所以先用它作为例子.

$SO_3$  群 (以及  $SU_2$  群) 的生成元  $Q_i (i = 1, 2, 3)$  满足下列代数关系:

$$[Q_i, Q_j] = i\epsilon_{ijk}Q_k. \quad (24.1)$$

鉴于我们仅讨论三维表示, 不讨论旋量表示, 所以, 可以不区分  $SO_3$  群和  $SU_2$  群, 作为一个假想的模型, 令

$$\begin{aligned} Q_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 \pm iQ_2), \\ Q_{\pm}^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 \mp iQ_2), \\ Q_3 &= Q_3. \end{aligned} \quad (24.2)$$

注意, 这不是一个完全真实的模型, 因为从 (22.19) 式, 我们知道, 真实的  $Q_{\pm}$  应当包含同位旋为零的部分, 而 (24.2) 式中没有它.

下一步, 对应于每一个生成元, 引进一个自旋为 1 的规范场和一个自旋为 0 的标量场 (称为希格斯场) (见表 24.1). 我们来构造由这些  $\phi$  场及  $W_{\mu}$  场组成的体系的拉格朗日密度, 要求它满足:

- i)  $W_{\mu}^0 = A_{\mu}$  场是电磁作用的规范场——电磁场, 相应的粒子是光子, 其质量  $m_A = 0$ ;
- ii) 拉氏密度在整体  $SO_3$  变换下不变.

表 24.1

生成元	$Q_{\text{强}}$	$Q_{\text{电}}$	$Q_{\text{弱}}^{\dagger}$
规范场	$W_{\mu}^{\pm}$	$W_{\mu}^0$	$W_{\mu}^{-}$
希格斯场	$\phi^+$	$\phi^0$	$\phi^-$

后面将要证明, 仅仅从这两个要求出发, 就可以确定  $\mathcal{L}$  的大部分项, 而且这样构造出来的  $\mathcal{L}$  在定域  $SO_3$  变换下是不变的.

表面看来, 由  $m_A = 0$  的要求加上  $SO_3$  不变性, 会造成  $m_{W^{\pm}} = 0$ , 从而使得由  $W^{\pm}$  传递的作用一点不像弱作用. 实际上并不一定这样. 我们将要证明, 可以有这样的情形: 既有  $\mathcal{L}$  在  $SO_3$  变换下的不变性, 而  $m_{W^{\pm}}$  又可以很重 (比如说  $30 \sim 300 \text{ GeV}$ ). 不过这个证明要转一点弯, 先后要涉及戈德斯通机制及希格斯机制. 这一章主要就讨论它们.

容易看到, 下列拉氏函数密度满足上述两个要求:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\mathbf{W}_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2} (D_{\mu}\phi)^2 - U(\phi), \quad (24.3)$$

其中

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \mathbf{W}_{\nu} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \mathbf{W}_{\mu} + e (\mathbf{W}_{\mu} \times \mathbf{W}_{\nu}), \quad (24.4)$$

$$D_{\mu}\phi = \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + e \mathbf{W}_{\mu} \times \right) \phi. \quad (24.5)$$

$U(\phi)$  是  $SO_3$  不变的  $\phi$  的函数. 在下面的讨论中, 我们将取其具体形式为

$$U(\phi) = \frac{1}{2} a \phi^2 + \frac{1}{4} b (\phi^2)^2. \quad (24.6)$$

(24.3) 式的前两项由对  $\mathcal{L}$  的两个要求唯一确定, 理由如下:

从自由  $\phi$  场的  $\mathcal{L}$  场出发, 考虑到  $W_{\mu}^0 = A_{\mu}$  是电磁作用的规范场, 根据规范理论的一般原则, 应作代换

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \phi^{\pm} \rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \mp ie W_{\mu}^0 \right) \phi^{\pm}. \quad (24.7)$$

整体  $SO_3$  变换使得  $\mathbf{W}_\mu$  的三个分量互变,  $\phi$  也是如此, 所以必定有

$$D_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} + \{\mathbf{W}_\mu \text{ 的线性齐次函数}\} \\ \times \{\phi \text{ 的线性齐次函数}\}. \quad (24.8)$$

又从表 24.1 知道,  $\mathbf{W}_\mu$  及  $\phi$  都是  $SO_3$  矢量. 为了保证  $\mathcal{L}$  在整体  $SO_3$  变换下不变,  $D_\mu \phi$  必须是  $SO_3$  矢量, (24.8) 式中第二项也应当是同位旋为 1 的矢量, 它是由两个同位旋为 1 的矢量  $\mathbf{W}_\mu$  和  $\phi$  构成的, 其唯一可能的方式是  $\mathbf{W}_\mu \times \phi$ , 这就给出了 (24.5) 式.

同理, 由电磁作用规范不变性, 对于  $\mathbf{W}_{\mu\nu}$  场, 应有

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\nu^\pm - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W_\mu^\pm \right) \rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mp ie A_\mu \right) W_\nu^\pm \\ - \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mp ie A_\nu \right) W_\mu^\pm. \quad (24.9)$$

整体  $SO_3$  转动使它成为

$$\mathbf{W}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{W}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathbf{W}_\mu + (\mathbf{W}_\mu \text{ 的二次函数}). \quad (24.10)$$

为了保证  $\mathcal{L}$  在整体  $SO_3$  转动下的不变性,  $\mathbf{W}_{\mu\nu}$  应当是  $SO_3$  矢量, (24.10) 式中第二项也就必须是  $\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu$  的形式.

注意, (24.4) 式及 (24.5) 式中的  $e$  也是确定的, 这是由 (24.8) 及 (24.10) 式所包含的电磁规范部分必须回到 (24.7) 及 (24.9) 式所决定的.

上述讨论表明, 在同位旋空间中, 如果存在第三方向的阿贝尔规范变换, 同时要求  $\mathcal{L}$  在整体  $SO_3$  变换下是不变的, 即可以确定  $\mathcal{L}$  的形式为 (24.3) 式, 其中除  $U(\phi)$  有一定的任意性外, 其余各项都是确定的.

下面我们来证明, 这样构造出来的  $\mathcal{L}$  对下列定域  $SO_3$  变换是不变的:

$$\delta \phi(x) = \theta(x) \times \phi, \\ \delta \mathbf{W}_\mu(x) = \theta(x) \times \mathbf{W}_\mu(x) - \frac{1}{e} \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_\mu}, \quad (24.11)$$

其中  $\theta(x)$  是无穷小函数,

注意, (24.3) 式中的第一项就是纯杨振宁-密尔斯规范场的拉氏函数密度 (19.4) 式, 它在定域  $SO_3$  变换 (24.11) 下的不变性早已证明过了. 第三项  $U(\phi)$  项不包含对  $\phi$  的微商, 所以只要  $U(\phi)$  满足整体  $SO_3$  不变, 就同时满足定域  $SO_3$  不变. 我们所取的具体表达式 (24.6) 确实明显地在定域  $SO_3$  变换下是不变的, 余下的是第二项, 可以由

$$\begin{aligned}\delta(D_\mu\phi) &= \theta \times D_\mu\phi + \frac{\partial\theta}{\partial x_\mu} \times \phi + e \left( -\frac{1}{e} \frac{\partial\theta}{\partial x_\mu} \right) \times \phi \\ &= \theta \times D_\mu\phi\end{aligned}$$

立即得出  $\delta[(D_\mu\phi)^2] = 0$ . 至此, (24.3) 式在定域  $SO_3$  变换下的不变性证毕.

现在我们具体地分析当 (24.6) 式中的  $a < 0$ ,  $b > 0$  的情形 ( $b$  必须大于零, 否则, 能量不存在下限). 此时,  $U(\phi)$  的极小值在  $\phi^2 = \rho^2 = -\frac{a}{b} > 0$  处. 这是  $\phi$  空间中的一个连续分布的球

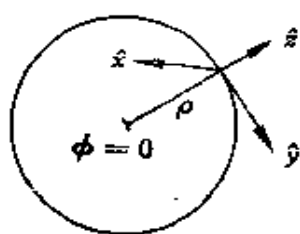


图 24.1

面(见图 24.1). 可以把这里的情形与第十六章中讨论的  $CP$  自发破坏对比一下. 在那里  $\phi$  是只有一个分量的赝标量场, 有二个分开的简并的最低能量态, 需要穿过位垒才能由一个态过渡到另一个态. 由于体系的体积很大, 要穿透的位垒就很大, 所以真空实际上只是在其中的一个态处. 结果, 虽然  $\mathcal{L}$  是  $CP$  守恒的, 还是可以有  $CP$  不守恒的现象. 图 24.1 球面上的每一点都可以是真空, 由于球面是连续分布, 似乎容易从球面上一个点挪动到另一个点. 不过可以证明, 此体系在同位旋空间中的转动惯量是正比于体积的, 体积非常大 (比如说, 整个宇宙), 转动惯量也就非常大, 于是, 实际上真空基本上只能停留在球面上的某一个点处, 即固定在同位旋空间的某一个方向 (记作  $\hat{z}$ ) 上, 真空也就不再有  $SO_3$  不变性.

令该点(真空) $\phi$ 的值(即真空平均值)为

$$\langle \phi \rangle = \rho z, \quad \rho^2 = -\frac{a}{b}, \quad (24.12)$$

将 $\phi$ 场在真空附近展开:

$$\phi = \langle \phi \rangle + \delta\phi \quad (24.13)$$

或者分开写为

$$\phi^0 = \rho + \delta\phi^0, \quad (24.14)$$

$$\phi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_x \mp i\phi_y) = \delta\phi^\pm,$$

则有如下定理:

**定理** 如果没有规范场  $W_\mu$ , 则  $\phi^0$  场的质量  $m_{\phi^0} \neq 0$ ,  $\phi^\pm$  场的质量  $m_{\phi^\pm} = 0$ .

**证明** 如果没有  $W_\mu$ , 则

$$D_\mu \phi = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi,$$

于是  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right)^2 - U(\phi)$ . 由(24.13)式, 有

$$\phi^2 = (\rho z + \delta\phi)^2 = \rho^2 + 2\rho\delta\phi^0 + (\delta\phi)^2,$$

代入  $U(\phi)$  的表达式(24.6)式, 得

$$U(\phi) = -\frac{b}{4} \rho^4 + \rho^2 b (\delta\phi^0)^2 + O[(\delta\phi)^3, (\delta\phi)^4].$$

由于没有  $(\delta\phi^x)^2$  及  $(\delta\phi^y)^2$  项, 所以

$$m_{\phi^\pm} = 0.$$

$\frac{1}{2}(\delta\phi^0)^2$  的系数是

$$m_{\phi^0}^2 = 2b\rho^2 = -2a > 0,$$

这就证明了定理.

这种在没有  $W_\mu$  场时必定会出现质量为零的  $\phi^\pm$  场的机制, 就叫做戈德斯通机制.

我们不妨再进一步论述一下戈德斯通机制的含意. 我们讨论

的机制的特点是  $\mathcal{L}$  对于  $SO_3$  变换的不变性, 但真空态却不是不变的, 从而造成此体系中所有的态都可能有  $SO_3$  不对称的表现. 比如在上述例子中, 开始时  $\mathcal{L}$  有  $SO_3$  不变性,  $W_{\mu}^{a,0}$  是  $SO_3$  同一同位旋矢量的三个分量. 我们希望最后的结果中  $W_{\mu}^0$  的质量为零, 但  $W_{\mu}^a$  的质量不为零. 由于  $\mathcal{L}$  是  $SO_3$  对称的, 为了要得到  $SO_3$  不对称的结果, 只能使真空不对称. 由于真空是洛伦兹不变的, 所以这种真空不对称必需选择自旋为 0 的场来表现. 对于具有连续对称性 (如这里的  $SO_3$ ) 的  $\mathcal{L}$ , 简并的真空也是连续分布的 (如这里的  $\phi^2 = -\frac{a}{b}$ ). 当对固定的真空方向展开  $\phi$  场时, 沿真空方向的涨落会造成  $U(\phi)$  的变化, 但与真空垂直方向的涨落根本不改变  $U(\phi)$ , 相应的粒子的质量就必定是 0. 所以, 如果取  $\phi$  为有三个分量的场, 就会有两个场质量为 0, 如果取  $\phi$  为二个分量的场, 就会有一个场质量为 0, 等等. 这就是戈德斯通现象. 但是, 我们知道, 质量为零的场对应的作用力是长程力, 应当容易被发现. 目前在自然界中已发现的质量为 0 的场, 只有自旋为 1 的光子场, 自旋为  $\frac{1}{2}$  的几种中微子场以及自旋为 2 的引力场, 没有自旋为 0 的零质量场. 此外, 如果自然界真有自旋为 0、质量也为零的场, 我们就会无法测量质量. 因为如果把  $\phi$  变一点, 所有物体的质量都会变, 这就会出现混乱. 从这个角度看来, 戈德斯通定理似乎表明, 对连续变化的简并真空, 不能把真空取在某一固定方向. 这对于把  $\langle \phi \rangle \neq 0$  作为不对称的源的想法, 是一个严重的打击, 使得在一段时间内, 许多人不再去思考真空自发破坏的可能性. 后来, 希格斯指出, 情况不一定总像前面所叙述的那样, 还可以有另外的情形, 这就是希格斯机制.

## § 24.2 希格斯机制

我们仍然讨论上节所用的模型. 与讨论戈德斯通机制比较,



关键的不同之处在于把规范场  $W_{\mu}^{\pm,0}$  放在一起考虑。

与(24.13)式相同,取

$$\phi = \rho \hat{z} + \delta\phi,$$

把此代入(24.5)式,得到

$$\begin{aligned} D_{\mu}\phi &= \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta\phi + e\mathbf{W}_{\mu} \times \hat{z}\rho + e\mathbf{W}_{\mu} \times \delta\phi, \\ -\frac{1}{2}(D_{\mu}\phi)^2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta\phi\right)^2 - e\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta\phi\right) \cdot \mathbf{W}_{\mu} \times \hat{z}\rho \\ &\quad - \frac{1}{2}\rho^2(\mathbf{W}_{\mu} \times \hat{z}\rho)^2 + (\delta\phi \text{ 及 } \mathbf{W}_{\mu} \text{ 的三次以上函数}). \end{aligned} \quad (24.15)$$

这里由于包含场三次以上的项不是质量项,所以没有列出它们。

(24.15)式中  $\mathbf{W}_{\mu}$  的二次项是

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}e^2(\mathbf{W}_{\mu} \times \hat{z}\rho)^2 &= -\frac{1}{2}e^2\rho^2[(\mathbf{W}_{\mu})_x^2 + (\mathbf{W}_{\mu})_y^2] \\ &= -\frac{1}{2}e^2\rho^2 W_{\mu}^{+}W_{\mu}^{-}, \end{aligned}$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} m_{W^{\pm}} &= e\rho, \\ m_{W^0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.16)$$

(24.15)式右边第三项是

$$-e\left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta\phi\right) \cdot \mathbf{W} \times \hat{z}\rho = -e\hat{z}\rho \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta\phi \times \mathbf{W}_{\mu}\right), \quad (24.17)$$

此项只与  $W_{\mu}^{\pm}$  及  $\phi^{\pm}$  有关,与  $W_{\mu}^0$  及  $\phi^0$  无关。所以在整个  $\mathcal{L}$  中,  $W_{\mu}^0$  保持无质量,  $\phi^0$  的质量仍为  $2b\rho^2$ 。(24.17)式中  $W_{\mu}^{\pm}$  与  $\frac{\partial\delta\phi^{\pm}}{\partial x_{\mu}}$  存在着二次型方式的联系,应该用解本征方程的方法将整个二次型对角化,这个计算不在这里作了。结果的实质就是  $\left(\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial x_{\mu}}\right)$  与  $W_{\mu}^{\pm}$  结合在一起形成有质量的  $W_{\mu}^{\pm}$ , 其质量数值就是(24.16)式。实际上,从自由度数日看来,在  $e=0$  时  $\phi^{\pm}$  没有质量,  $W_{\mu}^{\pm}$  也没有

质量。在辐射规范中，无质量的  $W_{\mu}^{\pm}$  只有两个横向自由度。在有  $e$  以后， $W_{\mu}^{\pm}$  有了质量，增加了一个新的纵向自由度，这个自由度正好是  $\frac{\partial \phi^{\pm}}{\partial x_{\mu}}$  提供的。此时，上一节中我们感到头痛的零质量的  $\phi^{\pm}$  消失了，而  $W_{\mu}^{\pm}$  则获得了质量。这就是希格斯机制。

上面讨论的各场的质量及自由度数目见表 24.2。

表 24.2

场	(质量) <sup>2</sup>	物理态的自由度数日 (固定 $\mathbf{k}$ )
$W_{\mu}^0$	0	2
$\left. \begin{matrix} W_{\mu}^{\pm} \\ \phi^{\pm} \end{matrix} \right\}$	$(e\rho)^2$	$2 + 1 = 3$
$\phi^0$	$2b\rho^2$	1

讨论质量及自由度等问题，在技巧上有一个更简单的规范——么正规范。假设开始时经典场  $\phi(x)$  在每一个不同点  $x$  上有不同的方向，由于  $\mathcal{L}$  是定域  $SO_3$  规范不变的，所以，我们总可作一定域规范变换，使得每一个点的  $\phi$  都与  $\hat{z}$  平行。（实际上要能够这样作，必须假定  $\phi(x)$  不具有拓扑性量子数。）于是，一开始，我们就可以写为

$$\phi(x) = \hat{z}(\rho + \delta\phi^0),$$

$$D_{\mu}\phi \rightarrow D_{\mu}\phi = \hat{z} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta\phi^0 + e(\mathbf{W}_{\mu} \times \hat{z})(\rho + \delta\phi^0),$$

由此得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} m_W^2 W_{\mu}^+ W_{\mu}^- - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \delta\phi^0 \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} m_{\phi^0}^2 (\delta\phi^0)^2 + (\mathbf{W}_{\mu} \text{ 和 } \delta\phi^0 \text{ 的三次及四次多项式}), \end{aligned}$$

其中

$$m_W^2 = e^2 \rho^2, \quad m_{\phi^0}^2 = 2b\rho^2. \quad (24.18)$$

在(24.18)式中没有  $\phi^{\pm}$  场，将此式量子化的结果是  $W_{\mu}^{\pm}$  场及  $\delta\phi^0$

场均有质量, 结论与前面的讨论一样. 人们自然会问: 这里的做法是先变换经典场, 然后量子化; 而前面的做法是先量子化, 再用希格斯机制. 这两种作法究竟是否等价呢? 一般说来, 可以用费曼图的方法证明它们是等价的. 但是, 对于有拓扑性孤粒子的情形还不清楚, 因为这时不能作规范转动, 两种方法可能就不等价了.

最后, 我们给出希格斯场属于同位旋  $\frac{1}{2}$  表示时的拉格朗日密度. 令

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (24.19)$$

而且,  $\phi^+$  及  $\phi^0$  均是复数场, 则  $\phi$  的协变导数为

$$D_\mu \phi = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi - ie \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu \phi. \quad (24.20)$$

相应地,  $\mathcal{L}$  取为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu}^2 - (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - U(\phi), \quad (24.21)$$

$$U(\phi) = a\phi^\dagger \phi + b(\phi^\dagger \phi)^2, \quad (24.22)$$

$$a < 0, \quad b > 0.$$

于是有如下定理:

**定理** (24.21) 式的  $\mathcal{L}$  在下列定域规范变换下不变:

$$\mathbf{W}_\mu \rightarrow \mathbf{W}_\mu + \boldsymbol{\theta}(x) \times \mathbf{W}_\mu - \frac{1}{e} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(x)}{\partial x_\mu},$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x) = e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}(x)} \phi(x) \\ &\approx \phi(x) - \frac{1}{2} i \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}(x) \phi(x). \end{aligned}$$

**证明** 因为

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \phi) &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta} \phi \right] - ie \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu \right) \left( -\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) \phi \\ &\quad - ie \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{W}_\mu \right) \phi - ie \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \left( -\frac{1}{e} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial x_\mu} \right) \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} - ie \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu \phi \right) - \frac{i}{2} \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} \right) \phi \\
&\quad - ie \frac{1}{2} \left( -i \frac{1}{2} \right) [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}] \phi + \frac{ie}{2} \left( \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} \right) \phi \\
&\quad - ie \left( \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{W}_\mu \right) \phi = -\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta} (D_\mu \phi),
\end{aligned}$$

所以

$$D_\mu \phi \rightarrow e^{-\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}} D_\mu \phi,$$

于是 $\mathcal{L}$ 中第二项是不变的,  $\mathcal{L}$ 中第三项的不变性是显然的, 第一项的不变性则是前面早已证明过的,

这个结果在后面将要用到.

至此, 我们通过一个最简单的模型, 讨论了戈德斯通机制及希格斯机制. 这些讨论给我们指出了建立弱作用和电磁作用统一理论的方法. 首先, 我们应该找出能够正确地给出弱作用和电磁作用的群, 然后, 对应于群的每一个生成元 (假设有  $n$  个), 引进一个规范场. 这样就有  $n$  个质量为 0 的矢量场. 由于物理上只有一个零质量矢量场——电磁场, 所以必须取一组自旋为 0 的希格斯场, 使真空不对称, 并使  $(n-1)$  个戈德斯通粒子与  $(n-1)$  个零质量规范场结合, 产生  $(n-1)$  个有质量的矢量场. 同时, 对应于真空方向的那个规范场保持无质量, 这就是电磁场. 下一章将要讨论的温伯格理论就是这样建立起来的.

## 第二十五章 温伯格理论

### § 25.1 $SU_2 \times U_1$ 群

要按照上一章所讲的方式建立弱作用及电磁作用的统一理论,首先必须确定要采用的最小规范群.为此,我们具体地分析一下  $(l^-, \nu_l)$  体系 ( $l = e, \mu, \tau$ ) 的弱作用及电磁作用.

在第二十三章中,我们已经讲过,  $(l^-, \nu_l)$  体系的带电弱流及电磁流为

$$\begin{aligned}(j_\mu)_{\mathfrak{W}} &= i\phi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \phi_{\nu_l}, \\ (j_\mu)_{\mathfrak{E}} &= -i\phi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \phi_l.\end{aligned}\quad (25.1)$$

由此得

$$\begin{aligned}Q_{\mathfrak{E}} &= -i \int d^3r (j_4)_{\mathfrak{E}} = - \int d^3r \phi_l^\dagger \phi_l, \\ Q_{\mathfrak{W}} &= -i \int d^3r (j_4)_{\mathfrak{W}} = \int d^3r \phi_l^\dagger (1 + \gamma_5) \phi_{\nu_l}, \\ Q_{\mathfrak{W}}^\dagger &= \int d^3r \phi_{\nu_l}^\dagger (1 + \gamma_5) \phi_l.\end{aligned}\quad (25.2)$$

这些荷都是实验上已经观察到的,因此,任何一个弱电磁统一理论的群的生成元至少必须包括它们.

这些  $Q$  满足的是什么代数呢? 为了搞清楚这个问题,我们必须在  $Q$  之间进行一切可能的对易运算,直到封闭.在具体运算之前,我们先将  $Q_{\mathfrak{W}}$  分解为厄米算符,定义

$$\begin{aligned}T_1 - iT_2 &= \frac{1}{2} Q_{\mathfrak{W}}, \\ T_1 + iT_2 &= \frac{1}{2} Q_{\mathfrak{W}}^\dagger.\end{aligned}\quad (25.3)$$

设

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{\nu_1} \\ \phi_t \end{pmatrix}, \quad (25.4)$$

则 (25.2) 式中的  $Q_{\text{算}}$  可以写为

$$Q_{\text{算}} = \frac{1}{2} \int d^3r \phi^\dagger (1 + \gamma_5) (\tau_1 - i\tau_2) \phi. \quad (25.5)$$

与 (25.3) 式比较, 得到

$$T_1 = \frac{1}{4} \int d^3r \phi^\dagger (1 + \gamma_5) \tau_1 \phi,$$

$$T_2 = \frac{1}{4} \int d^3r \phi^\dagger (1 + \gamma_5) \tau_2 \phi.$$

应用狄拉克场的等时反对易关系:

$$\{\phi(\mathbf{r}, t), \phi^\dagger(\mathbf{r}', t)\} = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') 1,$$

$$\{\phi(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}', t)\} = \{\phi^\dagger(\mathbf{r}, t), \phi^\dagger(\mathbf{r}', t)\} = 0,$$

可以得到

$$\begin{aligned} & \left[ \int \phi^\dagger(\mathbf{r}, t) A \phi(\mathbf{r}, t) d^3r, \int \phi^\dagger(\mathbf{r}', t) B \phi(\mathbf{r}', t) d^3r' \right] \\ &= \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \phi_i^\dagger(\mathbf{r}, t) A_{ij} \{ \phi_j(\mathbf{r}, t), \phi_a^\dagger(\mathbf{r}', t) \} B_{ab} \phi_b(\mathbf{r}', t) \\ & \quad - \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \phi_a^\dagger(\mathbf{r}', t) B_{ab} \{ \phi_b(\mathbf{r}', t), \phi_i^\dagger(\mathbf{r}, t) \} A_{ij} \phi_j(\mathbf{r}, t) \\ &= \int d^3r \phi^\dagger(\mathbf{r}, t) [A, B] \phi(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (25.6)$$

应用此式, 可得

$$\begin{aligned} -i[T_1, T_2] &= -i \int d^3r \phi^\dagger \left[ \frac{1}{4} (1 + \gamma_5) \tau_1, \frac{1}{4} (1 + \gamma_5) \tau_2 \right] \phi \\ &= -i \int d^3r \phi^\dagger \frac{1}{16} (1 + \gamma_5)^2 [\tau_1, \tau_2] \phi \\ &= \frac{1}{4} \int d^3r \phi^\dagger (1 + \gamma_5) \tau_3 \phi \equiv T_3. \end{aligned}$$

$T_1$ 、 $T_2$  以及上式最后定义的  $T_3$ , 可以统一地写为

$$\mathbf{T} = \frac{1}{4} \int d^3r \phi^\dagger (1 + \gamma_5) \boldsymbol{\tau} \phi, \quad (25.7)$$

显然,它们是  $SU_2$  群的生成元.

再考虑  $Q_{\text{电}}$ . 由 (25.2) 及 (25.4) 式,  $Q_{\text{电}}$  可写为

$$\begin{aligned} Q_{\text{电}} &= \int d^3r \phi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \phi \\ &= \int d^3r \phi^\dagger \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1 + \gamma_5)\tau_3 + \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)\tau_3 \right] \phi. \end{aligned}$$

定义

$$T' \equiv Q_{\text{电}} - T_3 = \int \phi^\dagger \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)\tau_3 \right] \phi, \quad (25.8)$$

有

$$\begin{aligned} [T', T_i] &= \int d^3r \phi^\dagger \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)\tau_3, \frac{1}{4}(1 + \gamma_5)\tau_i \right] \phi \\ &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (25.9)$$

我们看到,  $T'$  及  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 对于对易运算已经封闭, 这就是包含  $Q_{\text{强}}$ ,  $Q_{\text{弱}}^\dagger$  及  $Q_{\text{电}}$  的最小的代数. 相对应的群就是  $SU_2 \times U_1$  群. 任何弱作用和电磁作用的统一理论的规范群, 至少必须包含这个  $SU_2 \times U_1$  群. 当然, 增加一些至今实验上尚未看到的生成元使代数扩大, 并不是不允许的, 但最终要由实验去检验. 温伯格理论是以许可的最小群—— $SU_2 \times U_1$  群作为规范群建立起来的, 目前, 它与实验很好地符合.

## § 25.2 温伯格理论

确定了规范群, 就可以按照前一章所讲的方法来建立弱电统一理论. 我们先给出理论中包含的各种场——规范场、希格斯场及轻子场以及它们在  $SU_2 \times U_1$  变换下的性质.

由于  $SU_2 \times U_1$  群有四个生成元, 对应的应该有四个独立的规范场  $\mathbf{B}_\mu, C_\mu$ . 在这四个规范场中, 最后应该只有一个线性组合保持无质量(电磁场), 另外三个独立场都必须通过希格斯机制获得质量, 这就至少要引进四个厄米的希格斯场, 其中一个确定真空

的方向,另外三个使三个规范场得到质量。温伯格建议,希格斯场按最简单的方式取为

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad (25.10)$$

它属于  $SU_2$  的旋量表示  $(T_\phi = \frac{1}{2})$ 。对于轻子场,可将它们的左旋及右旋部分分开写为

$$L = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \phi_{\nu_l} \\ \phi_l \end{pmatrix}, \quad (25.11)$$

$$R = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \phi_l.$$

这里已注意到只有左旋的中微子。应用(25.11)式,可以将轻子场的弱同位旋表达式(25.7)写为

$$\mathbf{T}_l = \frac{1}{2} \int d^3x L^\dagger \boldsymbol{\tau} L. \quad (25.12)$$

以(25.12)及(25.8)式作用于  $L$  和  $R$ , 即求得  $L$  和  $R$  在  $SU_2$  变换下的性质。其  $T$  的值则由(25.8)式定出, 结果见表 25.1。表中也列出了规范场及希格斯场的性质。对于为什么将  $T_\phi$  取为  $\frac{1}{2}$ ,

表 25.1

	$ \mathbf{T} $	$T_z$	$T'$
规范场 $\mathbf{B}_\mu$	1	+1, 0, -1	0
$\mathbf{C}_\mu$	0	0	0
轻子场 $\nu_l$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$l_L$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$l_R$	0	0	-1
希格斯场 $\phi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



需要作一些说明。我们知道,如果在原始的拉格朗日密度 $\mathcal{L}$ 中有形式为 $-m_l(l_L^\dagger \gamma_4 l_R + \text{h.c.})$ 的带电轻子的质量项,则违反 $SU_2 \times U_1$ 不变性,这是不允许的。为了既保持原始的 $\mathcal{L}$ 满足 $SU_2 \times U_1$ 不变,又使得带电轻子最终能获得质量,最简单的方法是使得开始的 $\mathcal{L}$ 中包括有 $(-f L^\dagger \gamma_4 R \phi + \text{h.c.})$ 的项,然后,由 $\phi$ 的真空平均值提供带电轻子的质量。取 $T'_\phi = \frac{1}{2}$ ,保证了 $L^\dagger \gamma_4 R \phi$ 在 $SU_2 \times U_1$ 下的不变性。

应用表 25.1 及上一章给出的方法,立即可以写出体系的拉格朗日密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \mathbf{B}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} C_{\mu\nu}^2 - R^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu D_\mu R - L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu D_\mu L \\ & - (\bar{D}_\mu \phi^\dagger)(D_\mu \phi) - U(\phi^\dagger \phi) - (f L^\dagger \gamma_4 R \phi + \text{h.c.}), \end{aligned} \quad (25.13)$$

其中

$$\mathbf{B}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{B}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathbf{B}_\mu + g \mathbf{B}_\mu \times \mathbf{B}_\nu, \quad (25.14)$$

$$C_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} C_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} C_\mu, \quad (25.15)$$

$$D_\mu L = \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu - ig' \left( -\frac{1}{2} \right) C_\mu \right] L, \quad (25.16)$$

$$D_\mu R = \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig' (-1) C_\mu \right] R, \quad (25.17)$$

$$D_\mu \phi = \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}_\mu - ig' \left( \frac{1}{2} \right) C_\mu \right] \phi, \quad (25.18)$$

$$\bar{D}_\mu \phi^\dagger = \begin{cases} (D_\mu \phi)^\dagger & \text{当 } \mu = 1, 2, 3 \\ -(D_4 \phi)^\dagger & \text{当 } \mu = 4, \end{cases} \quad (25.19)$$

$$U(\phi^\dagger \phi) = \frac{1}{2} a \phi^\dagger \phi + \frac{1}{2} b (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (25.20)$$

(25.16)式中第二项 $\mathbf{B}_\mu$ 前的 $\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}$ 反映了 $T_L = \frac{1}{2}$ , 第三项 $C_\mu$ 前

的  $\left(-\frac{1}{2}\right)$  反映了  $T'_L = -\frac{1}{2}$ . (25.17) 及 (25.18) 式中的系数也是根据同样的道理写出的.  $\mathcal{L}$  中取  $\bar{D}_\mu \phi^\dagger$  是为了保持  $\mathcal{L}$  的洛伦兹不变性, 这与 (22.5) 式取  $\bar{j}_\mu$  是同样的道理.  $U(\phi^\dagger \phi)$  取 (25.20) 式既能保证  $\mathcal{L}$  在  $SU_2 \times U_1$  下的不变性, 又能给出不是  $SU_2 \times U_1$  不变的真空.

可以证明, (25.13) 式确实在下列定域  $SU_2 \times U_1$  无穷小变换下是不变的:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\mu(x) &\rightarrow \mathbf{B}_\mu(x) + \boldsymbol{\theta}(x) \times \mathbf{B}_\mu(x) - \frac{1}{g} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(x)}{\partial x_\mu}, \\ C_\mu(x) &\rightarrow C_\mu(x) - \frac{1}{g} \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_\mu}, \\ L(x) &\rightarrow e^{-i\alpha(x)T'_L} e^{-i\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}(x)} L(x), \\ R(x) &\rightarrow e^{-i\alpha(x)T'_R} R(x), \\ \phi(x) &\rightarrow e^{-i\alpha(x)T'_\phi} e^{-i\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}(x)} \phi(x), \end{aligned} \quad (25.21)$$

其中  $\boldsymbol{\theta}(x)$ ,  $\alpha(x)$  是无穷小的函数. 实际上, 我们已经证明过, (25.13) 式在单独的  $SU_2$  规范变换下不变, 在单独的  $U(1)$  规范变换下也不变. 无穷小变换 (25.21) 只需考虑到  $\boldsymbol{\theta}(x)$  及  $\alpha(x)$  的一次项. 因此,  $\mathcal{L}$  在单由  $\boldsymbol{\theta}(x)$  及  $\alpha(x)$  决定的变换下的不变性, 就保证了  $\mathcal{L}$  在无穷小变换 (25.21) 下的不变性. 根据李群理论, 群的有限大小的变换可以由许多无穷小变换达到. 所以, 由  $\mathcal{L}$  对群的无穷小变换的不变性, 即可导出  $\mathcal{L}$  对有限变换的不变性. 这就是证明 (25.13) 式的基本思路, 具体的详细的证明留给读者去做.

(25.13) 式中  $U(\phi^\dagger \phi)$  的最小值位于  $\phi^\dagger \phi = \rho^2 = -\frac{a}{b} > 0$  处, 因此,

$$\langle \phi^\dagger \phi \rangle_{\text{真空}} = \sum_{i=1}^4 \langle \phi_i^2 \rangle_{\text{真空}} = \rho^2, \quad (25.22)$$

其中已用到了(25.10)式。(25.22)式说明,简并的真空在四度 $\phi$ 空间中形成半径为 $\rho$ 的球面。物理的真空应选得使其相应方向的规范场为电磁场。电磁场不带电,相应的 $\phi$ 场真空期望值的方向也应不带电。由 $Q = T_3 + T'$ ,  $T'_\phi = \frac{1}{2}$ 可知, $\phi$ 场真空期望值的方向应选在 $T_3 = -\frac{1}{2}$ 的方向。

下面为了讨论方便,我们选择么正规范。于是,应通过规范变换使 $\phi$ 场变换为

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (25.23)$$

其中 $\phi^0$ 是厄米的,将(25.23)式代入(25.18)式,得到

$$D_\mu \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \phi^0}{\partial x_\mu} \end{pmatrix} - i \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g(B_\mu)_1 - ig(B_\mu)_2 \\ -g(B_\mu)_3 + ig' C_\mu \end{pmatrix} \phi^0, \quad (25.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_\mu \phi^\dagger D_\mu \phi &= (D_i \phi)^\dagger (D_i \phi) - (D_4 \phi)^\dagger (D_4 \phi) \\ &= \left( \frac{\partial \phi^0}{\partial x_\mu} \right)^2 + \frac{1}{4} \{ g^2 [(\mathbf{B}_\mu)_1^2 + (\mathbf{B}_\mu)_2^2] \\ &\quad + [-g(\mathbf{B}_\mu)_3 + g' C_\mu]^2 \} (\phi^0)^2. \end{aligned} \quad (25.25)$$

规范场粒子的质量来自于此项中 $\phi$ 场真空平均值的贡献。显然,带电规范场 $(\mathbf{B}_\mu)_1$ 、 $(\mathbf{B}_\mu)_2$ 及中性规范场的线性组合 $[-g(\mathbf{B}_\mu)_3 + g' C_\mu]$ 是有质量的。无质量的规范场——电磁场必定是与后者正交的中性规范场组合。所以,我们取

$$\phi^0 = \rho + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta \phi^0, \quad (25.26)$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} [-g(\mathbf{B}_\mu)_3 + g' C_\mu], \quad (25.27)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} [g C_\mu + g'(\mathbf{B}_\mu)_3], \quad (25.28)$$

$$W_{\mu}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\mathbf{B}_{\mu})_1 \mp i(\mathbf{B}_{\mu})_2], \quad (25.29)$$

将(25.26)至(25.29)式代入(25.13)式,并将得到的 $\mathcal{L}$ 按包含的场的幕次展开为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{二次项}} + \mathcal{L}_{\text{三次项}} + \mathcal{L}_{\text{四次项}}, \quad (25.30)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{二次项}} = & -\frac{1}{2} m_{\phi^0}^2 (\delta\phi^0)^2 - m_l \phi_l^\dagger \gamma_4 \phi_l - m_W^2 W_\mu^\dagger W_\mu \\ & - \frac{1}{2} m_z^2 Z_\mu^2 + (\text{场的导数项}), \end{aligned} \quad (25.31)$$

$$m_{\phi^0}^2 = \frac{1}{2} U''(\rho^2) = -2a > 0,$$

$$m_W^2 = \frac{1}{2} g^2 \rho^2, \quad (25.32)$$

$$m_z^2 = \frac{1}{2} (g^2 + g'^2) \rho^2 > m_W^2,$$

$$m_l = f\rho.$$

(25.31)式中没有 $A_\mu$ 及 $\phi_{\nu l}$ 的非导数二次项,这表示

$$\begin{aligned} m_A &= 0, \\ m_{\nu l} &= 0, \end{aligned} \quad (25.33)$$

实际上,在所有粒子的质量都由希格斯机制决定的理论中,不与希格斯场耦合的场一定没有质量。(25.13)式中, $A$ 场及中微子场都不与 $\phi$ 场耦合,所以它们的质量必定为0。(25.32)及(25.33)式是符合要求的。

下一步我们要研究这些场之间的相互作用,定义

$$\operatorname{tg} \theta_W = \frac{g'}{g}, \quad (25.34)$$

$\theta_W$ 称为温伯格角,由(25.27)及(25.28)式,有

$$\begin{aligned} Z_\mu &= -\cos \theta_W (\mathbf{B}_\mu)_3 + \sin \theta_W C_\mu, \\ A_\mu &= \sin \theta_W (\mathbf{B}_\mu)_3 + \cos \theta_W C_\mu. \end{aligned} \quad (25.35)$$

其逆关系为

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_\mu)_3 &= \sin \theta_W A_\mu - \cos \theta_W Z_\mu, \\ C_\mu &= \cos \theta_W A_\mu + \sin \theta_W Z_\mu.\end{aligned}\quad (25.36)$$

于是, (25.13) 式中的第三、四两项可写为

$$\begin{aligned}-L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu D_\mu L &= -L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \frac{\partial L}{\partial x_\mu} + i \frac{1}{2} L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \\ &\times \begin{pmatrix} g(B_\mu)_3 - g' C_\mu, & \sqrt{2} g W_\mu^- \\ \sqrt{2} g W_\mu^+, & -g(B_\mu)_3 - g' C_\mu \end{pmatrix} L \\ &= -L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \frac{\partial L}{\partial x_\mu} + i \frac{1}{2} L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \\ &\times \begin{pmatrix} -\sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu, & \sqrt{2} g W_\mu^- \\ \sqrt{2} g W_\mu^+, & -\sqrt{g^2 + g'^2} [2 \sin \theta_W \cos \theta_W A_\mu \\ & + (-\cos^2 \theta_W + \sin^2 \theta_W) Z_\mu] \end{pmatrix} \times L\end{aligned}\quad (25.37)$$

$$\begin{aligned}-R^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu D_\mu R &= -R^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} R - i R^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu R g' \\ &\times (\cos \theta_W A_\mu + \sin \theta_W Z_\mu).\end{aligned}\quad (25.38)$$

从 (25.37) 及 (25.38) 式, 立即得到轻子与带电中间玻色子的相互作用为

$$\mathcal{L}_{\text{轻子}-W^\pm} = i \frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^\pm \phi_\nu^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \phi_l + \text{h. c.}, \quad (25.39)$$

(25.39) 式完全确定了轻子带电流的弱过程。考虑图 25.1 的轻子-轻子过程, 并在  $k \rightarrow 0$  的极限下与相应的唯象流流耦合理论比较,

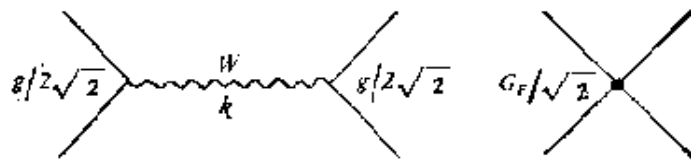


图 25.1

即得

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \left( \frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{m_W^2} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (25.40)$$

从 (25.36)、(25.37) 及 (25.38) 式, 亦可得到轻子与光子的相互作用为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{轻子-光子}} &= -iR^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu R g' \cos \theta_W A_\mu \\
 &\quad + i \frac{1}{2} L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & -2\sqrt{g^2 + g'^2} \sin \theta_W \cos \theta_W A_\mu \end{pmatrix} L \\
 &= -ig' \cos \theta_W [l_R^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu l_R + l_L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu l_L] A_\mu \\
 &= -ig' \cos \theta_W l^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu l A_\mu.
 \end{aligned} \tag{25.41}$$

与量子电动力学的相应表达式比较, 可知

$$e = g' \cos \theta_W = g \sin \theta_W, \tag{25.42}$$

再比较 (25.40) 式及 (25.42) 式, 即得

$$m_W^2 = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{G_F} = \frac{\sqrt{2} e^2}{8 G_F \sin^2 \theta_W} \geq \frac{e^2}{4 \sqrt{2} G_F} = (37.3 \text{ GeV})^2. \tag{25.43}$$

实验上已测得  $\sin^2 \theta_W \approx \frac{1}{4}$ , 所以

$$m_W \approx 74.6 \text{ GeV}.$$

我们看到, 温伯格理论确实对带电中间玻色子的质量作出了相当确切的预言, 这使得寻找  $W$  的工作成了实验的重点. 美国正在建造的能量为  $1 \text{ TeV}$  ( $10^{12} \text{ eV}$ ) 级的大加速器, 和欧洲联合核子研究中心正在建造的高能质子-反质子对撞机, 都有可能找到它们.

同样, 我们也可以得到轻子与  $Z^0$  粒子的作用为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{轻子-}Z^0} &= -ig' \sin \theta_W Z_\mu l_R^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu l_R \\
 &\quad - i \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} (v_l)_L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (v_l)_L Z_\mu \\
 &\quad - i \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} l_L^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu l_L (-\cos^2 \theta_W + \sin^2 \theta_W) Z_\mu \\
 &= -i \frac{1}{4} \sqrt{g^2 + g'^2} \psi_{v_l}^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_{v_l} Z_\mu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \left[ \sin^2 \theta_W \phi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \phi_l \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (-\cos^2 \theta_W + \sin^2 \theta_W) \phi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \phi_l \right] \\
& = -i \frac{1}{4} \sqrt{g^2 + g'^2} \{ \phi_{\nu l}^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \phi_{\nu l} - \phi_l^\dagger \gamma_4 \gamma_\mu \\
& \quad \times [(1 - 4 \sin^2 \theta_W) + \gamma_5] \times \phi_l \} Z_\mu. \quad (25.44)
\end{aligned}$$

与  $Z^0$  耦合的轻子流相应于唯象理论中的轻子中性弱流。注意，由于实验上  $\sin^2 \theta_W \approx \frac{1}{4}$ ，带电轻子的中性弱流几乎是纯轴矢流，这可能有某种深刻的原因，不过现在还不知道。

从实验验证理论的角度看来，探索  $Z^0$  粒子或许比探索  $W^\pm$  还重要，这是因为带电中间玻色子衰变的终态为  $e\nu_e, \mu\nu_\mu$  等等，其中  $\nu_e, \nu_\mu$  等是看不见的，也就是说，只能看到终态粒子的一部分。 $Z^0$  粒子不同，它可以衰变到  $e^+e^-, \mu^+\mu^-$  等等，这些终态中所有的粒子都带电，能量又高，几乎不可能看不到它。余下的一个重要问题是它的质量有多大，从 (25.32) 式，有

$$\begin{aligned}
m_z^2 &= \frac{1}{2} (g^2 + g'^2) \rho^2 = \frac{m_W^2}{\cos^2 \theta_W} = \frac{\sqrt{2} e^2}{8 G_F \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \\
&= \frac{\sqrt{2} e^2}{2 G_F (\sin 2\theta_W)^2} \geq \frac{e^2}{\sqrt{2} G_F} \approx (74.6 \text{ GeV})^2 \quad (25.45)
\end{aligned}$$

用实验给出的  $\theta_W$  可以求得  $m_z \approx 100 \text{ GeV}$ 。所以，上面提到的美国和欧洲联合核子中心正在建造的大加速器发现  $Z^0$  的可能性是很大的。

按照温伯格理论，弱作用和电磁作用本来就只有一个耦合常数。弱作用在目前之所以看起来是弱的，是因为目前的能量比  $m_W$  小得太多。如果能量增加到  $m_W$  的数量级，弱作用强度就会与电磁作用的强度一样。显然，这是十分重要的。如果实验确实证明温伯格理论是正确的，其重要性就可以与十九世纪把电作用及磁作用统一起来的麦克斯韦理论相比拟。

### § 25.3 格拉肖-伊利奥朴勒斯-迈阿尼机制 (简称 GIM 机制)

上节讨论的仅仅是轻子体系。现在我们把它推广到强子体系。比较轻子带电流表达式 (22.3) 与强子带电流表达式 (22.8)，可以看到，一个很自然的方案是对上节关于轻子的讨论作如下代换：

$$\begin{aligned} \nu_l &\rightarrow u, \\ l &\rightarrow d_c \equiv (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c). \end{aligned} \quad (25.46)$$

于是，强子的弱荷及弱同位旋为

$$\left. \begin{aligned} Q_{\text{强}} &= \int d^3r d_c^\dagger (1 + \gamma_5) u, \\ Q_{\text{强}}^\dagger &= \int d^3r u^\dagger (1 + \gamma_5) d_c, \end{aligned} \right\} \quad (25.47)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{4} \int d^3r \phi^\dagger (1 + \gamma_5) \boldsymbol{\tau} \phi. \quad (25.48)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}.$$

由 (25.48) 式，可知

$$T_3 = \frac{1}{4} \int d^3r [u^\dagger (1 + \gamma_5) u - d_c^\dagger (1 + \gamma_5) d_c], \quad (25.49)$$

注意此式第二项中包括有

$$d^\dagger (1 + \gamma_5) s$$

及

$$s^\dagger (1 + \gamma_5) d,$$

前者  $\Delta s = -1$ ，后者  $\Delta s = +1$ ，这表明，由  $Z_\mu^0$  传递的强子弱作用中，在  $G_F$  一阶，就存在着  $\Delta s = \pm 2$  的部分，但实验上这是禁戒的。此外，由 (25.49) 式，到  $G_F$  的一阶，还允许  $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$  (见图 25.2)，但实验上，

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K_L \rightarrow \text{所有})} < 10^{-8}.$$



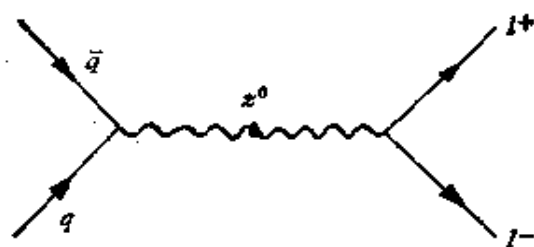


图 25.2

这个实验是非常精密的。我们知道， $K_L$  的宽度本身就是小的，所以，这个实验结果表示  $\Gamma(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  必定非常非常小，这样理论就遇到了困难。

格拉肖 (S. L. Glashow)、伊利奥朴勒斯 (J. Illiopollis) 及迈阿尼 (L. Maiani) 提出了解决这一困难的办法，这就是 GIM 机制。

首先，注意到前面讨论的轻子理论应该将所有的轻子都包括进去。在六十年代，人们知道的轻子有四个： $(e, \nu_e)$ ， $(\mu, \nu_\mu)$ 。于是，轻子流为

$$j_\mu \rightarrow j_\mu(e \text{ 型}) + j_\mu(\mu \text{ 型}).$$

一个自然的想法是，在作由轻子到强子的代换时，对应的夸克也有四种，除  $u, d, s$  外，增加一种与  $u$  夸克有同样电荷的  $c$  夸克。于是，(25.46) 式就改为

$$\begin{aligned} \nu_e &\rightarrow u, \\ e &\rightarrow d_c, \\ \nu_\mu &\rightarrow c, \\ \mu &\rightarrow s_c \equiv -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c, \end{aligned}$$

其中  $s_c$  由与  $d_c$  的正交性确定的。相应地  $Q_{\text{弱}}$  及  $T_3$  变为

$$\begin{aligned} Q_{\text{弱}} &= \int d^3r [u^\dagger(1 + \gamma_5)d_c + c^\dagger(1 + \gamma_5)s_c], \\ T_3 &= \frac{1}{4} \int d^3r [u^\dagger(1 + \gamma_5)u + c^\dagger(1 + \gamma_5)c \\ &\quad - d^\dagger(1 + \gamma_5)d - s^\dagger(1 + \gamma_5)s]. \end{aligned} \quad (25.50)$$

由于  $T_3$  的表达式不再包含  $\Delta s \approx 0$  的部分，理论中也就不再存在

$\Delta I \neq 0$  的中性流,问题就完全解决了.

GIM 的工作是十分重要的. 我们知道, 1964 年盖尔曼和茨维克 (G. Zweig) 在坂田模型的基础上提出了以  $SU_3$  为基础的夸克模型. 在发现  $\Omega^-$  粒子后,  $SU_3$  已为大家所公认. 于是就有一些人做  $SU_4$ ,  $SU_5$ ,  $SU_6 \cdots$ , 但当时这并不是人们重视的方向. GIM 的工作从一个重要的角度指出, 如果有中间玻色子, 老  $SU_3$  就有困难, 就应该有  $C$  夸克, 这就很有说服力. 后来, 丁肇中、里希特 (B. Richter) 等人的实验工作, 导致了  $J/\psi$  等一系列新粒子的发现, 证实了  $c$  夸克的存在.

最后, 我们指出, 只要将代换 (25.50) 用到前一节的各个式子中, 就可以直接得到  $\mathcal{L}_{\text{夸克}-W^\pm}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{夸克}-Z^0}$  等, 这里我们不再将它们列出了.

## 第二十六章 夸克部分子模型

### § 26.1 部分子假设

部分子模型与第二十三章讲过的高能内含反应有密切的关系,所以,我们先讨论下列内含反应的运动学:

$$l + N \rightarrow l' + X, \quad (26.1)$$

其中  $l, l'$  代表轻子 ( $e, \nu_e, \mu, \nu_\mu$  等),  $N$  代表核子,  $X$  代表所有可能的强子终态。各粒子的动量记号见图 26.1, 第二十三章中讨论过的反应 (23.16), 就是这类反应的一个典型例子。由于在我们所讨论的过程中轻子能量很高,所以可以取

$$m_l = m_{l'} = 0.$$

与 (23.18) 及 (23.19) 式相同,定义标度变量

$$x \equiv \frac{-q^2}{2p \cdot q} \equiv \frac{1}{\omega}, \quad (26.2)$$

其中  $q = k - k' = p' - p$ .  $x$  的变化范围是从 0 到 1,  $x = 1$  对应于弹性散射。除  $x$  (或  $\omega$ ) 以外,另一个常用的标度变量是

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}, \quad (26.3)$$

在实验室系中,

$$\begin{aligned} p &= (0, im_N), \\ k &= (\mathbf{k}, iE_l), \\ q &= (\mathbf{q}, iq_0), \end{aligned} \quad (26.4)$$

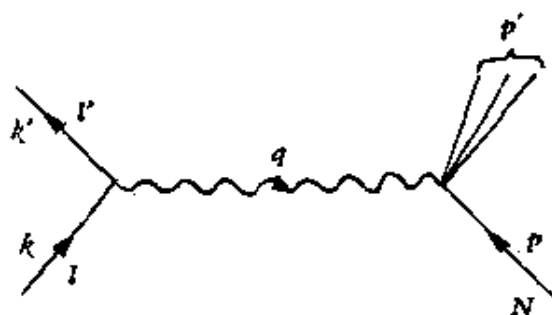


图 26.1

$$y \Rightarrow \frac{q_0}{E_l}, \quad (26.5)$$

$$x = \frac{q^2}{2m_N q_0}. \quad (26.6)$$

$q_0$  是入射轻子传递给强子的能量,  $E_l$  是入射轻子的能量, 所以,  $y$  是入射轻子传给强子的能量与入射轻子能量的比,  $0 \leq y \leq 1$ .

从图 26.1 可知, 反应 (26.1) 的独立动量有三个, 可取为  $k$ ,  $p$  和  $q$ . 一般它们可以组成 6 个独立的不变量, 但其中  $k^2 = -m_l^2$ ,  $p^2 = -m_N^2$ ,  $(k - q)^2 = -m_p^2$  是确定的, 所以可作变数的独立的不变量只有三个, 可取为

$$p \cdot k, \quad q^2 \quad \text{及} \quad p \cdot q.$$

显然, 在实验室系中, 也可以改取为

$$E_l, \quad x \quad \text{和} \quad y.$$

高能内含反应 (26.1) 的截面就是这三个量的函数. 如何计算这些高能内含反应的截面呢? 为此, 费曼作了一个十分简单的假设——部分子假设. 从现在的观点看来, 这个假设是这样的:

核子是一个孤粒子, 其中包含着许多部分子. 轻子和核子的深度非弹性散射 (26.1) 可以分解成轻子与组成核子的各夸克部分子的弹性碰撞过程:

$$l + q \rightarrow l' + q' \quad (26.7)$$

(参看图 26.2). 这个图象与轻子和原子核的碰撞类似, 当轻子能

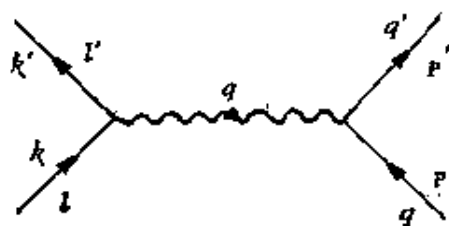


图 26.2

量很低时, 轻子与整个原子核碰撞; 当轻子能量足够高时, 每一次碰撞可以看成是轻子与原子核中一个核子碰撞. 这就是所谓脉冲近似 (pulse approximation). 在轻子与夸克部分子弹性碰撞以后, 该夸克部分子再与其他夸克部分子或袋碰撞, 形成许多终态粒子.

费曼在提出部分子假设时, 还不知道孤粒子 (或者袋), 所以这

是十分大胆的假设。现在实验已证明,这个假设是有道理的,这说明在科学研究中需要有大胆尝试的精神。

弹性碰撞 (26.7) 式的费曼图见图 26.2。由于

$$P'^2 = (P + q)^2 = P^2 = -m_q^2,$$

所以,

$$q^2 + 2P \cdot q = 0,$$

代入 (26.2) 式, 得到

$$x = \frac{P \cdot q}{p \cdot q}. \quad (26.8)$$

在入射轻子与核子的质心系中, 取它们的动量沿  $z$  轴方向, 则当  $E_l \rightarrow \infty$  时, 有

$$E_N = p_z + O\left(\frac{m_N^2}{p_z}\right).$$

而夸克的动量为

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_z \hat{z} + O(P_\perp), \\ P_0 &= P_z + O\left(\frac{m_q^2}{P_z}, \frac{P_\perp^2}{P_z}\right). \end{aligned}$$

设核子的半径为  $R_N$ , 则  $P_\perp \sim \frac{1}{R_N}$ .  $m_q$  是夸克在袋里的质量, 它也是  $\sim \frac{1}{R_N}$ . 所以, 对于足够大的  $P_z$ ,  $\frac{m_q^2}{P_z}$ ,  $\frac{P_\perp^2}{P_z}$  与  $\frac{m_N^2}{p_z}$ ,  $\frac{1}{R_N^2 p_z}$  等可以忽略, 从而有

$$P_\mu \propto p_\mu.$$

再由 (26.8) 式, 可得

$$P_\mu = x p_\mu. \quad (26.9)$$

这个式子十分重要, 它告诉我们, 在实验中, 变化  $q^2$  及  $p \cdot q$ , 测出截面的  $x$  分布, 就可以求出夸克在核子内的动量分布。这就是  $x$  的意义。

部分子模型已经广泛地应用到许多过程。在下一节中, 我们将讨论最基本的几个例子。

## § 26.2 部分子模型的应用示例

### 1. 中微子-核子深度非弹性散射 $\nu_l + N \rightarrow l + X$

根据部分子假设, 先要讨论中微子与夸克的准弹性散射. 从习题 9, 将其中的  $a, b$  粒子取为夸克,  $m_q E_\nu$  换为  $-k \cdot P = -k p_x = x m_N E_\nu$ , 并注意到  $E_\nu \gg m_q$ , 即可得到  $\nu$  (或  $\bar{\nu}$ ) 与夸克 (或反夸克) 的弹性碰撞:

$$\frac{d\sigma_{\nu q}}{d\Omega} = -\frac{k \cdot P}{2\pi} [(G_V + G_A)^2 + (G_V - G_A)^2(1-y)^2] dy, \quad (26.10)$$

$$\frac{d\sigma_{\bar{\nu} q}}{d\Omega} = -\frac{k \cdot P}{2\pi} [(G_V - G_A)^2 + (G_V + G_A)^2(1-y)^2] dy, \quad (26.11)$$

其中  $G_V$  及  $G_A$  的定义亦见习题.

根据前几章给出的夸克与轻子的弱作用形式, 假定只有  $u, \bar{u}$  及  $d, \bar{d}$  夸克参加作用, 忽略有  $\sin\theta_c$  压低的含奇异夸克的项以及其他更重的夸克的贡献, 则可能的反应类型只有

$$\begin{aligned} \nu_l + d &\rightarrow l^- + u, \\ \nu_l + \bar{u} &\rightarrow l^- + \bar{d}, \\ \bar{\nu}_l + u &\rightarrow l^+ + d, \\ \bar{\nu}_l + \bar{d} &\rightarrow l^+ + \bar{u}. \end{aligned}$$

根据  $G_A = G_V = G_F$ , 并应用部分子假设, 得到中微子与核子的深度非弹性散射截面为

$$d\sigma_{\nu N \rightarrow \mu^- + \dots} = \frac{2m_N E_\nu}{\pi} G_F^2 [xu(x) + x\bar{u}(x)(1-y)^2] dx dy, \quad (26.12)$$

$$d\sigma_{\bar{\nu} N \rightarrow \mu^+ + \dots} = \frac{2m_N E_\nu}{\pi} G_F^2 [xu(x)(1-y)^2 + x\bar{d}(x)] dx dy, \quad (26.13)$$

式中的  $u(x), d(x), \bar{u}(x)$  及  $\bar{d}(x)$  分别是  $N$  中  $u, d, \bar{u}$  及  $\bar{d}$  夸克

所占动量比例为  $x$  的分布函数。

如果我们考虑同位旋标量靶, 其中质子数与中子数相等, 且假定质子及中子都不含反夸克, 则根据同位旋对称性, 质子的  $u(x)$ 、 $d(x)$  应分别与中子的  $d(x)$ 、 $u(x)$  一样。于是就有

$$\frac{\sigma_{\bar{\nu}}}{\sigma_{\nu}} = \int_0^1 (1-y)^2 dy = \frac{1}{3}. \quad (26.14)$$

如果实验数值与  $\frac{1}{3}$  偏离, 就反映核子中存在着反夸克。定义

$$B \equiv \frac{2(\sigma_{\nu} - \sigma_{\bar{\nu}})}{\sigma_{\nu} + \sigma_{\bar{\nu}}}, \quad (26.15)$$

(26.14) 式意味着  $B = 1$ 。实验上,  $B_{\text{实验值}} \approx 0.8$ , 表示核子中确实有大约百分之十几的反夸克, 它们及与之成对的夸克一起, 被称为海夸克。

注意在 (26.12) 及 (26.13) 式中, 截面的  $y$  分布是完全确定的, 不完全知道的只有  $x$  分布, 它由夸克在核子中的动量分布函数决定。这种情形在其它深度非弹性过程中也出现。如果不用部分子模型, 而仅仅从运动学考虑, 出现的  $x$  的函数的类型将要多得多, 而在不同的过程中, 出现的函数也似乎互不相关。部分子模型用几个夸克动量分布函数, 把大量的  $x$  的函数联系了起来。

现在回到中微子-核子深度非弹性散射。如果仅从运动学考虑, 则有 (见习题 25)

$$d\sigma_{\nu N \rightarrow l^- + \dots} = \frac{E_N E_{\nu}}{\pi} G_F^2 F_2(x) [(1-y) + yL(x) + y(1-y)R(x)] dx dy, \quad (26.16)$$

$$d\sigma_{\bar{\nu} N \rightarrow l^+ + \dots} = \frac{E_N E_{\bar{\nu}}}{\pi} G_F^2 F_2(x) [(1-y) + yR(x) - y(1-y)L(x)] dx dy. \quad (26.17)$$

将 (26.16)、(26.17) 式与 (26.12)、(26.13) 式比较, 得到

$$\begin{aligned} F_2(x) &= 2x(d + \bar{u}), \\ F_2(x)L(x) &= 2xd, \end{aligned}$$

$$F_2(x)R(x) = 2x\bar{u}. \quad (26.18)$$

文献中常常用  $F_1(x)$ ,  $F_3(x)$  代替  $L(x)$  及  $R(x)$ , 它们的关系是

$$F_2(x)(L(x) \pm R(x)) = \begin{cases} 2x F_1(x), \\ -x F_3(x), \end{cases} \quad (26.19)$$

由 (26.18) 及 (26.19) 式, 有

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) &= d(x) + \bar{u}(x), \\ F_2(x) &= 2x(d(x) + \bar{u}(x)), \\ F_3(x) &= -2(d(x) - \bar{u}(x)). \end{aligned} \right\} \quad (26.20)$$

## 2. 电子-核子深度非弹性散射

这一过程的分析与中微子-核子深度非弹性散射类似, 不过, 从 (23.23) 式可以看到, 它要少一个不变函数  $F_3$ . 这里我们不再作详细计算, 只是列出计算的结果(不忽略  $s$  夸克):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{9} (u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9} (d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) \right], \\ F_2(x) &= x \left[ \frac{4}{9} (u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9} (d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)) \right] \\ &= 2x F_1. \end{aligned} \quad (26.21)$$

## 3. 求和规则

注意在前面的各个式子, 例如 (26.20) 及 (26.21) 式中, 不同过程的  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  是不同的,  $u(x)$ ,  $d(x) \cdots$  等也是该过程中所用的强子靶的夸克动量分布函数. 对不同的靶, 这些函数不同. 为了应用方便, 我们用同位旋对称性把中子的夸克分布函数换成质子的夸克分布函数, 于是有

$$\left. \begin{aligned} F_2^{\nu p}(x) &= x \left[ \frac{4}{9} (u + \bar{u}) + \frac{1}{9} (d + \bar{d} + s + \bar{s}) \right], \\ F_2^{\nu n}(x) &= x \left[ \frac{4}{9} (d + \bar{d}) + \frac{1}{9} (u + \bar{u} + s + \bar{s}) \right], \\ F_2^{\nu p}(x) &= 2x(d + \bar{u}) + O(\theta_c), \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} F_2^{\nu n}(x) &= 2x(u + \bar{d}) + O(\theta_c), \\ F_2^{\bar{\nu} p}(x) &= 2x(\bar{d} + u) + O(\theta_c), \\ F_2^{\bar{\nu} n}(x) &= 2x(\bar{u} + d) + O(\theta_c), \\ F_3^{\nu p}(x) &= -2(d - \bar{u}) = F_3^{\bar{\nu} n}, \\ F_3^{\bar{\nu} p}(x) &= -2(u - \bar{d}) = F_3^{\nu n}. \end{aligned} \right\} \quad (26.22)$$

此外,所有的过程都有

$$F_2 = 2xF_1, \quad (26.23)$$

这里的  $u(x), d(x)$  等都是质子中夸克的动量分布函数,  $O(\theta_c)$  是  $\sin \theta_c$  量级的项. 应用这些关系,容易求得许多求和规则. 例如

1) 艾德勒 (Adler) 求和规则

$$\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega} (F_2^{\nu n} - F_2^{\bar{\nu} p}) = 2 \int_0^1 dx (u - \bar{u} - d + \bar{d}) = 2. \quad (26.24)$$

这里用了质子中  $u$  夸克数比  $d$  夸克数目多一个的事实,即

$$\int_0^1 dx (u - \bar{u}) = 2, \quad \int_0^1 dx (d - \bar{d}) = 1.$$

证明 (26.24) 式的更好方法是用同位旋,这里不再赘述.

2) 格罗斯-卢埃林-史密斯 (Gross-Llewellyn-Smith) 求和规则

$$\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} (F_3^{\nu n} + F_3^{\bar{\nu} p}) = -2 \int_0^1 dx (u + d - \bar{u} - \bar{d}) = -6.$$

此式的证明也是直接的. 除这两个求和规则外,还有一些其它的求和规则,这里就不一一列举了.

近年来高能物理学是十分重视轻子 ( $e, \mu, \nu_e, \nu_\mu$  等) 与核子的深度非弹性散射实验的, 其中最重要的是斯坦福直线加速器中心、费米实验室及欧洲联合核子研究中心的大量实验. 到1977年, 在综合大量实验资料的基础上, 肯定了实验与本节的结果在 15% 的准确度范围内成立. 最近二、三年, 人们进一步研究了本节中一些结果的修正. 这些修正的可能来源很多, 比如由于核子的大小产生的  $\frac{1}{R_N}$  量级的修正, 量子色动力学中规范场效应的修正等等, 这些我们不再在这里讲述了, 读者可以参考有关的文献.

## 习 题

### 第 三 部 分

23. 已知  $\mu$  衰变的拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} (j_\lambda)_e (\bar{j}_\lambda)_\mu + \text{h.c.},$$

其中

$$(j_\lambda)_l = i\phi_l^\dagger \gamma_\lambda \gamma_5 (1 + \gamma_5) \phi_{\nu_l}, \quad l = e \text{ 或 } \mu,$$

$$(\bar{j}_\lambda)_l = \begin{cases} j_\lambda^\dagger & \lambda \neq 4, \\ -j_4^\dagger & \lambda = 4, \end{cases}$$

和

$$G_\mu \cong 10^{-5}/m_p^2.$$

证明: 1)  $\mathcal{L}$  在  $CP$  和  $T$  变换下是不变的; 2)  $\mu$  介子的寿命是  $\tau_\mu^{-1} = G_\mu^2 m_\mu^5 (192\pi^3)^{-1}$ ; 3) 在一个完全极化  $\mu$  介子的静止系中, 归一化的终态  $e^\pm$  谱是

$$d^2N_e = x^2 [3 - 2x \mp \cos\theta(1 - 2x)] dx d\cos\theta,$$

其中

$$x = (\text{电子动量}) / \frac{1}{2} m_\mu,$$

$\theta = \mu$  介子极化和电子动量之间的角度.

在这两个表式中, 已忽略电子质量, 而中微子质量假设为零.

24. 半轻子弱作用的唯象拉氏密度可以写成

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [j_\lambda(x) J_\lambda(x) + \bar{j}_\lambda(x) \bar{J}_\lambda(x)],$$

其中  $G_F$  是费米常数,  $j_\lambda(x)$  和  $\bar{j}_\lambda(x)$  是 23 题所给出的同样的轻子流算符,  $J_\lambda(x)$  表示适当的强子流算符, 并且

$$\begin{cases} J_\lambda = J_\lambda^\dagger, & \text{对于 } \lambda \neq 4, \\ \bar{J}_\lambda = -J_\lambda^\dagger, & \text{对于 } \lambda = 4, \end{cases}$$

以致

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger.$$

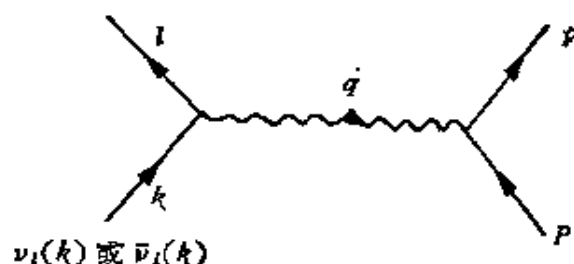
在反应

$$\nu_l(k) + P \rightarrow l^- + p, \quad (1a)$$

或

$$\bar{\nu}_l(k) + P \rightarrow l^+ + p \quad (1b)$$

中, 令  $k_\lambda$  和  $l_\lambda$  分别是轻子的初态和终态的 4 动量,  $P_\lambda$  和  $p_\lambda$  分别是强子的初态和终态的 4 动量. 终态  $p$  可以是质量为  $M$  的任一强



子系统. 定义

$$\left. \begin{aligned} L_{\alpha\beta} &\equiv \pm \sum_{s_l} \langle l | j_\alpha | \nu \rangle \langle l | j_\beta | \nu \rangle^*, \\ H_{\alpha\beta} &\equiv \pm \sum_{s_P, s_p} \langle p | J_\alpha | P \rangle \langle p | J_\beta | P \rangle^*, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中的 + 号对应于  $\beta \neq 4$ ; 一号对应于  $\beta = 4$ , 而求和遍及  $l$ ,  $P$  和  $p$  粒子的适当螺旋度  $s_l$ ,  $s_P$  和  $s_p$ .

试证明: 1) 在零轻子质量近似下, 因为  $q_\alpha L_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} q_\beta = 0$ , 我们有

$$L_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} \hat{H}_{\alpha\beta},$$

其中

$$\hat{H}_{\alpha\beta} = (P_0 p_0)^{-1} \left[ m^2 \delta_{\alpha\beta} W_1 + P_\alpha P_\beta W_2 - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} P_\gamma p_\delta W_3 \right], \quad (3)$$

$q_\lambda = k_\lambda - l_\lambda = p_\lambda - P_\lambda$ , 且  $W_1, W_2, W_3$  都是  $q^2 = \mathbf{q}^2 - q_0^2$  和  $M^2$  的无量纲标量函数. 它们和实验系中  $J_\lambda$  的矩阵元平方:

$$\alpha_+ = \sum_{s_p} \frac{1}{2} |\langle s_p | J_x + iJ_y | s_p = s_p - 1 \rangle|^2, \quad \left. \right\}$$

$$\alpha_- \equiv \sum_{s_P} \frac{1}{2} |\langle s_P | J_x - iJ_y | s_P = s_P + 1 \rangle|^2, \quad (4)$$

及

$$q^2 \alpha_0 \equiv \sum_{s_P} |\langle s_P | (E_P - m)J_z + i|\mathbf{P}|J_4 | s_P = s_P \rangle|^2$$

有下列关系:

$$W_1 = (\alpha_+ + \alpha_-)E_P/m,$$

$$W_2 = (\alpha_+ + \alpha_- + \alpha_0)q^2 E_P/m\mathbf{P}^2,$$

$$W_3 = 2(\alpha_+ - \alpha_-)E_P/|\mathbf{P}|,$$

其中取实验室系统的  $z$  轴和  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$  方向平行;  $P_z$  和  $q_z$  的第四分量分别为  $iE_P$  和  $iq_0$ 。于是,  $E_P = (\mathbf{P}^2 + M^2)^{\frac{1}{2}}$  和  $q_0 = E_p - m = E_\nu - E_l$ , 其中  $m$  是核子质量,  $E_\nu$  和  $E_l$  分别是  $\nu_l$  (或  $\bar{\nu}_l$ ) 和  $l$  的实验室能量。

2)  $\nu$ -反应 (1a) 的微分截面是

$$d\sigma_\nu = (2\pi q_0)^{-1} G_F^2 m E_\nu dy \left\{ mxy^2 W_1 + \left[ 1 - y - \frac{1}{2} (mxy^2/q_0) \right] q_0 W_2 - xy \left( 1 - \frac{1}{2} y \right) q_0 W_3 \right\}, \quad (5a)$$

其中

$$x \equiv -q^2/2P \cdot q = q^2/2mq_0,$$

$$y \equiv q \cdot P/k \cdot P = q_0/E_\nu.$$

3) 方程 (5a) 可以写成另一形式如下:

$$d\sigma_\nu = (16\pi m E_\nu^2 \mathbf{P}^2)^{-1} G_F^2 q^2 E_\nu dq^2 [(E_\nu + E_l)^2 - \mathbf{p}^2] \times [\alpha_+ \xi + \alpha_- \xi^{-1} + \alpha_0], \quad (6a)$$

其中

$$\xi \equiv \frac{E_\nu + E_l - |\mathbf{P}|}{E_\nu + E_l + |\mathbf{P}|}.$$

4) 对  $\bar{\nu}$ -反应 (1b), 我们在方程 (2)、(3) 和 (4) 中用  $\bar{J}_i$  代替  $J_i$ 。 (5a) 式现在用下面公式代替:

$$d\sigma_{\bar{\nu}} = (2\pi q_0)^{-1} G_F^2 m E_\nu dy \left\{ mxy^2 W_1 + \left[ 1 - y - \frac{1}{2} (mxy^2/q_0) \right] q_0 W_2 \right.$$

$$+ xy \left(1 - \frac{1}{2} y\right) q_0 W_3 \} \quad (5b)$$

或代替(6a), 它的等效形式为

$$d\sigma_{\bar{\nu}} = (16\pi m E_{\nu}^2 \mathbf{P}^2)^{-1} G_F^2 q^2 E_p dq^2 [(E_{\nu} + E_l)^2 - \mathbf{P}^2] \\ \times [\alpha_- \xi + \alpha_+ \xi^{-1} + \alpha_0]. \quad (6b)$$

25. 现在令反应(1a)或(1b)中的强子终态  $p$  表示一连续态的特定道(如  $P\pi$  或  $n\pi$ , 或  $P\pi\pi$ , 等等), 定义

$$F_1(q^2, x) \equiv \sum_p (2J_p + 1)^{-1} m^2 \rho_p(M^2) W_1, \\ F_2(q^2, x) \equiv \sum_p (2J_p + 1)^{-1} m q_0 \rho_p(M^2) W_2, \\ F_3(q^2, x) \equiv \sum_p (2J_p + 1)^{-1} m q_0 \rho_p(M^2) W_3,$$

其中  $J_p$  是  $p$  的总角动量,  $\rho_p(M^2) dM^2$  是 (不变质量)<sup>2</sup> 在  $M^2$  和  $M^2 + dM^2$  之间的  $p$  道的状态总数, 而求和遍及不同道  $p$  的任何非相干混合.

试证明: 1) 现在的微分截面是

$$d\sigma_{\nu\text{或}\bar{\nu}} = \frac{m E_{\nu}}{\pi} G_F^2 dx dy \left[ xy^2 F_1 + \left(1 - y - \frac{m}{2q_0} xy^2\right) F_2 \right. \\ \left. \mp xy \left(1 - \frac{1}{2} y\right) F_3 \right], \quad (7)$$

其中对  $\nu_l$  反应取一号, 对  $\bar{\nu}_l$  反应取十号.

2) 在标度极限  $q^2 \rightarrow \infty$  下(但  $x$  和  $y$  固定), 我们有

$$x \left( F_1 - \frac{1}{2} F_3 \right) / F_2 \rightarrow L(x) \equiv \alpha_- / (\alpha_+ + \alpha_- + \alpha_0),$$

和

$$x \left( F_1 + \frac{1}{2} F_3 \right) / F_2 \rightarrow R(x) \equiv \alpha_+ / (\alpha_+ + \alpha_- + \alpha_0);$$

所以, 方程(7) 变成

$$d\sigma_{\nu} = \pi^{-1} G_F^2 m E_{\nu} dx dy F_2(x) \\ \times [(1 - y) + y L(x) - y(1 - y) R(x)], \quad \Bigg\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{和} \\ & d\sigma_v = \pi^{-1} G_F^2 m E_\nu dx dy F_2(x) \\ & \quad \times [(1-y) + yR(x) - y(1-y)L(x)], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中  $F_2(x)$  是  $F_2(q^2, x)$  的标度极限.

26. 试证明: 1) 含有以下反应的微分截面

$$e^- + P (\text{或 } n) \rightarrow e^- + \dots$$

可以写成

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{m E_e}{2\pi} \left( \frac{e^2}{q^2} \right)^2 dx dy & \left[ xy^2 F_1(q^2, x) \right. \\ & \left. + \left( 1 - y - \frac{m}{2q_0} xy^2 \right) F_2(q^2, x) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

在这里, 我们利用了和前面两个习题中相同的符号, 只是用  $e$  代替了  $\nu_l$  和强子电磁流  $J_\lambda^i$  代替了  $J_\lambda$ .

2) 在标度极限下, 方程 (9) 变成

$$d\sigma = 4\pi \left( \frac{\alpha}{q^2} \right)^2 dq^2 d\omega \left[ \left( \frac{q^2}{s} \right)^2 F_1 + \left( \frac{1}{\omega} - \frac{q^2}{s} \right) F_2 \right],$$

其中

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad \omega = x^{-1}, \quad \text{和} \quad s = -(k+p)^2.$$

27. 令  $V(x)$  和  $A(x)$  分别是弱作用中的  $\Delta Q = 1$  的矢量和轴矢量流.

试证明: 1) 从正劳伦兹不变性和空间反射对称性, 求证

$$\langle n | V_\lambda(x) | p \rangle = i U_n^\dagger \gamma_\lambda [\gamma_\lambda g_V + q_\mu \sigma_{\mu\lambda} g_M + i q_\lambda g_S] U_p e^{-iq \cdot x},$$

$$\begin{aligned} \langle n | A_\lambda(x) | p \rangle = i U_n^\dagger \gamma_\lambda \gamma_5 [\gamma_\lambda g_A + i q_\lambda g_P \\ + i(n_\lambda + p_\lambda) g_E] U_p e^{-iq \cdot x}, \end{aligned}$$

其中  $n_\lambda$  和  $p_\lambda$  分别表示  $n$  和  $p$  的 4 动量, 而  $U_n$  和  $U_p$  是相应的狄拉克旋量.  $q_\lambda = n_\lambda - p_\lambda$  和  $g_i (i = V, A, M, \dots)$  只与  $q^2$  有关.

2) 如果时间反演不变性成立, 则六个  $g_i$  都是实的.

3) 如果  $V_\lambda$  和  $A_\lambda$  都满足电荷对称条件 (有时认为是  $|\Delta I| = 1$  规则的结果),

$$-e^{-ixI_y}J_\lambda e^{ixI_y} = \begin{cases} J_\lambda^\dagger, & \text{对 } \lambda = 4, \\ -J_\lambda^\dagger, & \text{对 } \lambda = 4. \end{cases}$$

其中  $J_\lambda = V_\lambda$  或  $A_\lambda$ , 则  $g_V, g_M, g_A, g_P$  是实的, 而  $g_E$  和  $g_S$  是虚的.

4) 如果在  $G$  算符作用下,

$$GV_\lambda G^{-1} = V_\lambda \quad \text{而} \quad GA_\lambda G^{-1} = -A_\lambda,$$

则  $g_E = g_S = 0$ , 而  $g_V, g_M, g_A$  和  $g_P$  仍为复数, [条件(3)定义3温伯格第一类流.]

5) 如果电荷对称条件和时间反演不变性两者都成立, 则  $g_E = g_S = 0$ , 而  $g_V, g_M, g_A$  和  $g_P$  都是实的.

6) 如果  $\partial V_\lambda / \partial x_\lambda = 0$ , 则在略去  $n$  和  $p$  的质量差异后,  $g_S = 0$ .

28. 在卡比玻 (Cabibbo) 理论中, 假定  $\Delta Q \approx 0$  的弱流在  $SU_3$  变换下是按

$$J_\lambda = [(V_\lambda)_1^2 + (A_\lambda)_1^2] \cos \theta + [(V_\lambda)_2^2 + (A_\lambda)_2^2] \sin \theta,$$

或它的厄米共轭一样变换, 而电磁流正比于同一个八重态流的  $(V_\lambda)_1^2 - (V_\lambda)_2^2 - (V_\lambda)_3^2$ , 证明 (假设  $SU_3$  对称) 在零4动量转移下,

1) 矢量流的矩阵元为

$$\langle B_a^i | (V_\lambda)_b^j | B_c^k \rangle = iG_F f_{abc}^{ijk} U'^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda U,$$

其中  $G$  是一个常数,  $U$  和  $U'$  是初态和终态旋量

$$f_{abc}^{ijk} = \delta_a^i \delta_b^j \delta_c^k - \delta_b^i \delta_c^j \delta_a^k,$$

2) 轴矢量流  $(A_\lambda)_b^j$  的相应矩阵元是

$$\langle B_a^i | (A_\lambda)_b^j | B_c^k \rangle = iG_F [D d_{abc}^{ijk} + F f_{abc}^{ijk}] U'^\dagger \gamma_4 \gamma_\lambda \gamma_5 U,$$

其中  $D$  和  $F$  是常数, 而

$$\begin{aligned} d_{abc}^{ijk} = & \frac{4}{9} \delta_a^i \delta_b^j \delta_c^k + \delta_b^i \delta_a^j \delta_c^k + \delta_c^i \delta_a^j \delta_b^k \\ & - \frac{2}{3} [\delta_b^i \delta_c^j \delta_a^k + \delta_a^i \delta_c^j \delta_b^k + \delta_c^i \delta_b^j \delta_a^k], \end{aligned}$$

3) 证明下页表中的反应与矩阵元的对应关系.

反 应	矩阵元 $= iU'^{\dagger} \gamma_4 O_k U$ $O_k$
$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	$G_F \cos \theta [\gamma_4 + (D + F)\gamma_4\gamma_5]$
$\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e$	$G_F \cos \theta [-\sqrt{2/3}D\gamma_4\gamma_5]$
$\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + e^+ + \nu_e$	$G_F \cos \theta [-\sqrt{2/3}D\gamma_4\gamma_5]$
$\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0 + e^- + \bar{\nu}_e$	$\sqrt{2} G_F \cos \theta [\gamma_4 + F\gamma_4\gamma_5]$
$\Xi^- \rightarrow \Xi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$	$G_F \cos \theta [-\gamma_4 + (D - F)\gamma_4\gamma_5]$
$\Lambda^0 \rightarrow p + l^- + \bar{\nu}_l$	$G_F \sin \theta [\sqrt{3/2}\gamma_4 + \sqrt{1/6}(D + 3F)\gamma_4\gamma_5]$
$\Sigma^- \rightarrow n + l^- + \bar{\nu}_l$	$G_F \sin \theta [-\gamma_4 + (D - F)\gamma_4\gamma_5]$
$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + l^- + \bar{\nu}_l$	$G_F \sin \theta [-\sqrt{3/2}\gamma_4 + \sqrt{1/6}(D - 3F)\gamma_4\gamma_5]$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + l^- + \bar{\nu}_l$	$G_F \sin \theta [\sqrt{1/2}\gamma_4 + \sqrt{1/2}(D + F)\gamma_4\gamma_5]$
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + l^- + \bar{\nu}_l$	$G_F \sin \theta [\gamma_4 + (D + F)\gamma_4\gamma_5]$

[见 *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **15**, 416 (1966) 和 **17**, 513 (1967)]